





LA

GÉOMÉTRIE DU MOUVEMENT.

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE.

Dr Arthur SCHOENFLIES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GÖTTINGEN.

LA GÉOMÉTRIE DU MOUVEMENT

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR

Ch. SPECKEL,
Capitaine du Génie.

ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR,
SUIVIE DE

NOTIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LES COMPLEXES ET LES CONGRUENCES DE DROITES,

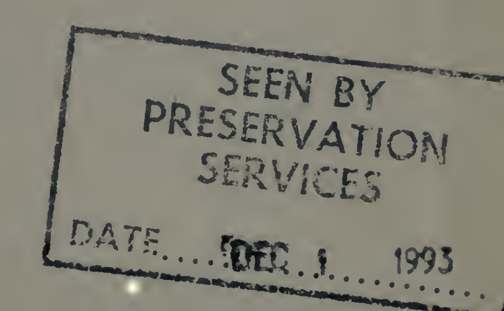
PAR

G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893



PRÉFACE.

La *Géométrie du mouvement,* appelée aussi *Géométrie cinématique,* n'a pas été, jusqu'ici, exposée dans son ensemble. Dans cet Ouvrage, je me suis proposé de faire une telle exposition et de compléter la Science en quelques points importants, je crois.

Les recherches modernes qui ont trait à la Géométrie du mouvement ont, en général, comme point de départ les notions de vitesse et d'accélération. Ce n'est pas là pourtant qu'il faut chercher la source de résultats purement géométriques, car la nature et les propriétés des formes géométriques engendrées par le déplacement ne dépendent pas de la vitesse plus ou moins grande avec laquelle se fait le déplacement, mais uniquement de la loi géométrique de ce mouvement, c'est-à-dire de la succession des positions occupées par le corps mobile.

A ce point de vue, la Géométrie du mouvement apparaît comme une branche de la Géométrie synthétique. *Chasles* et *Mannheim,* les fondateurs de cette Science ([1]), ont été conduits par cette même idée. On la rencontre aussi dans l'ouvrage de Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte,* et je me plais à reconnaître que c'est précisément cet ouvrage qui fit germer en moi l'idée d'exposer la Géométrie du mouvement d'une manière purement géométrique.

Les procédés de démonstration ont été fournis en première

([1]) Les travaux de Chasles et Mannheim ont une importance considé-

ligne par les théorèmes élémentaires de la Géométrie synthétique, d'autre part par la considération simultanée des deux mouvements d'un corps Σ par rapport à un corps Σ', et de Σ' par rapport à Σ. Je considère ce dernier point de vue comme facilitant beaucoup l'exposition des matières étudiées et comme contribuant à la clarté de l'ensemble.

L'Ouvrage qui est soumis au lecteur n'a pas la prétention de traiter d'une manière définitive de l'ensemble de la Géométrie du mouvement. Je me suis limité à une partie, la plus importante, celle qui a rapport au déplacement de systèmes invariables, lorsque chaque point décrit une courbe. Pour les autres mouvements, on n'a fait qu'établir les théorèmes principaux.

Les exemples servent à l'illustration de la théorie et n'ont pas pour but de donner une exposition complète de certains mécanismes.

On s'était proposé d'abord d'ajouter à la traduction française un aperçu complet des travaux récents sur le terrain de la Géométrie cinématique.

Malheureusement le cadre primitif de l'Ouvrage n'a pas permis de lui donner une pareille extension, et l'on a dû se borner à y admettre les résultats qui sont en relation directe avec les sujets déjà traités.

---

rable pour la Géométrie du mouvement. Il nous suffira d'y renvoyer une fois pour toutes.

Comme particulièrement importants, il faut citer les travaux suivants de Chasles :

1° *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit*, etc. (*Comptes rendus*, t. XVI, p. 1420);

2° *Propriétés relatives au déplacement fini*, etc. (*Comptes rendus*, t. LI et LII);

Et les travaux de Mannheim :

1° *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIIIe Cah., p. 57);

2° *Sur les surfaces trajectoires* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. I, p. 57);

3° *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique.*

Cependant nous ne voulons pas manquer de citer au moins les travaux importants qui, dans cette traduction, n'ont pas été pris en considération ou qui ne l'ont été qu'insuffisamment.

En ce qui concerne le mouvement plan, il faut mentionner quelques travaux récents sur la courbure des courbes polaires et leurs développées (*Zeitschr. f. Math.*, t. XXXIV), et les travaux de Mehmke sur l'influence des points singuliers des courbes polaires sur la courbure, ainsi que les beaux théorèmes de Burmester et Rodenberg sur le déplacement de plusieurs systèmes l'un dans l'autre. (*Technische Blätter*. Prague, 1890. — *Zeitschr. des Architect. u. Ingenieurvereins*. Hannover, 1890. — *Zeitschr. f. Math.*, 1892.)

Pour le mouvement d'un corps dans l'espace, on citera surtout les travaux sur la polhodie et l'herpolhodie, de Hess (*Math. Ann.*, t. XXVII) et de Sparre, Darboux, Mannheim (*Comptes rendus*, t. XCIX-CII).

Enfin, sur le terrain du déplacement dans l'espace, nous mentionnerons la théorie de l'hyperboloïde articulé (*Comptes rendus*, t. CII) de Mannheim; la Thèse plusieurs fois citée de Thévenet (Paris, 1886) et quelques travaux de Mannheim sur les pinceaux de droites et les déplacements d'une droite dont le degré de liberté est le quatrième.

Pour terminer, nous exprimons à M. le général Dewulf toute notre reconnaissance pour le soin avec lequel il a bien voulu suivre l'impression de la traduction de cet Ouvrage, que M. Speckel a consenti à entreprendre sur sa demande.

GÉOMÉTRIE DU MOUVEMENT.

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE.

CHAPITRE I.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME PLAN DANS SON PLAN.

I. — Le centre de rotation.

1. Soit un plan quelconque σ', et σ une portion limitée d'un plan qui se déplace d'une façon quelconque dans σ'. Supposons que les limites de σ s'éloignent indéfiniment, nous arriverons à la conceptiou d'un plan illimité σ se déplaçant dans un plan fixe et indéformable σ'. Conformément à l'usage établi en Géométrie synthétique, nous appellerons le plan σ un *système plan*. Chacun de ses points A décrit une courbe située dans le plan σ' et que nous appellerons la *trajectoire* de A.

Nous désignerons les points et les droites du système σ par des lettres sans indices, aussi longtemps qu'il ne s'agira que de caractériser un point A ou une droite g déterminés du système sans faire intervenir leur position dans σ'. Par contre, les différentes positions que σ, A et g prendront dans σ', au cours du mouvement, seront désignées par

$$\begin{array}{ccc} \sigma_0, & A_0, & g_0, \\ \sigma_1, & A_1, & g_1, \\ \sigma_2, & A_2, & g_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

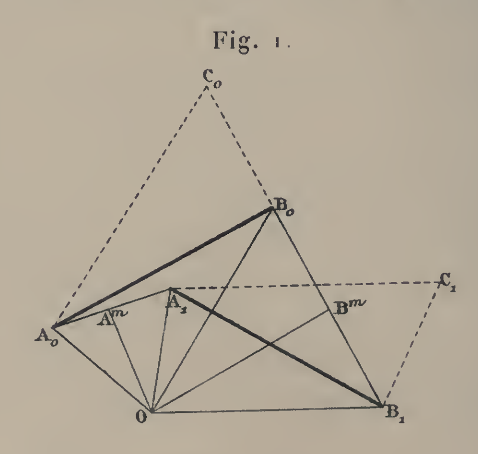
2. Soient maintenant A et B deux points de σ qui, pour deux positions successives et arbitraires de ce système, σ_0 et σ_1, occupent dans σ' des positions A_0, B_0 et A_1, B_1. Si C_0 est la première position d'un troisième point quelconque C de σ, sa position C_1 sera déterminée par la condition que les triangles $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ soient égaux. Et il doit être possible de transformer par un simple déplacement le triangle $A_0B_0C_0$ dans le triangle $A_1B_1C_1$. Un seul point C_1 satisfait à cette condition. Et comme ce qui vient d'être dit s'applique à tout point de σ, il s'ensuit que :

La position d'un système plan invariable qui se déplace dans son plan est complètement déterminée par la position de deux de ses points.

Comme, dans le cours de cet Ouvrage, nous ne considérerons que des systèmes invariables, c'est-à-dire tels que la distance de deux points reste la même pendant tout le déplacement, nous omettrons à l'avenir de faire ressortir spécialement l'invariabilité du système.

Élevons en A^m, milieu de A_0A_1, la perpendiculaire a^v sur cette droite, et en B^m, milieu de B_0B_1, la perpendiculaire b^v,

Fig. 1.



et désignons par O le point de rencontre des droites a^v et b^v (*fig.* 1).

On a

$$A_0O = A_1O,$$
$$B_0O = B_1O,$$
$$A_0B_0 = A_1B_1.$$

Les triangles A_0OB_0, A_1OB_1 sont donc égaux, et

$$\wedge(A_0OA_1) = \wedge(B_0OB_1).$$

On voit donc que, par une rotation autour de O, le point A_0 arrivera en A_1, en même temps que le point B_0 viendra en B_1. Et comme la position de σ est complètement déterminée par la position de ces deux points, on peut dire :

Le déplacement d'un système plan dans son plan peut être obtenu par une rotation du système autour d'un point fixe (¹).

On appellera ce point *centre* ou *pôle de rotation*. C'est le point réel commun aux systèmes congruents σ_0 et σ_1.

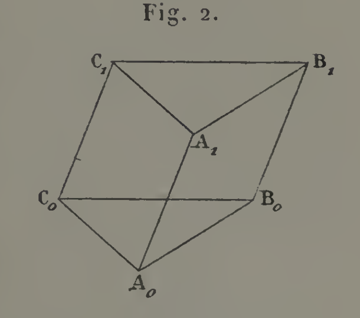
A_0A_1 sera la *corde* de A, et la perpendiculaire a^ν élevée en son milieu sera le *rayon normal* du point A.

Puisque, pour passer de la position σ_0 à la position σ_1, le système σ tourne autour de O, chacun de ses points C décrit un arc de cercle dont le centre est en O. c^ν passe donc par O, et il s'ensuit que :

Les rayons normaux de tous les points du système passent par le centre de rotation.

Il peut arriver comme cas particulier que les rayons normaux a^ν et b^ν soient parallèles. Alors leur point de rencontre est à l'infini (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les cordes A_0A_1, B_0B_1 sont donc également parallèles, et comme $A_0B_0 = A_1B_1$, elles sont égales entre elles.

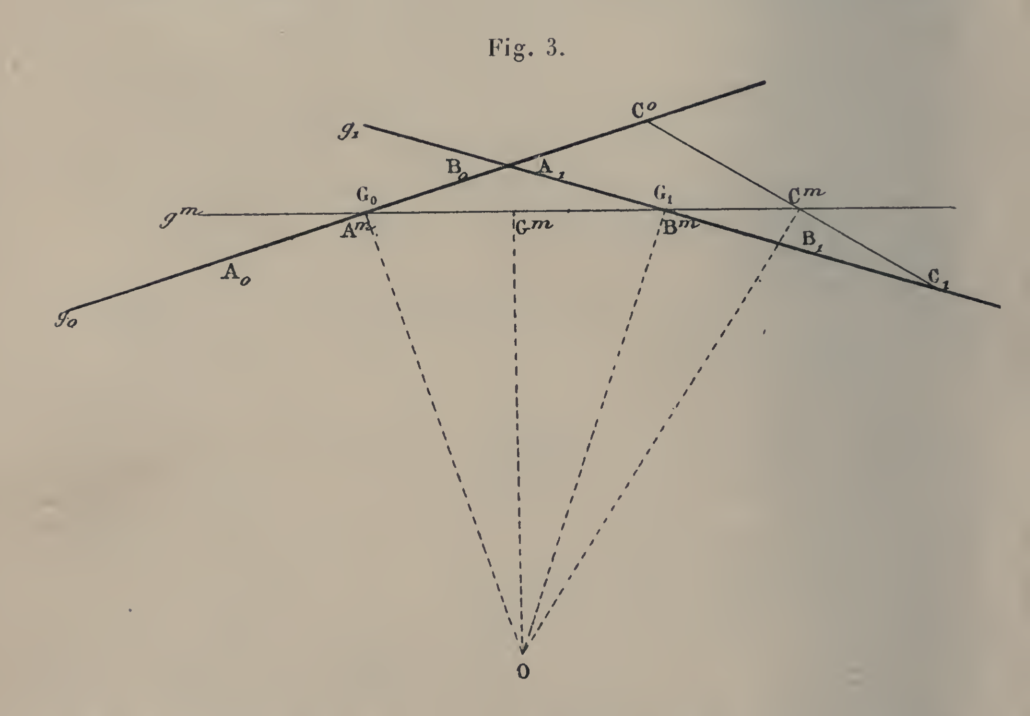
Si C_0C_1 est la corde d'un autre point quelconque C de σ, l'égalité des triangles $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ montre que C_0C_1 est aussi égale et parallèle à A_0A_1, et B_0B_1,

(¹) Ce théorème a d'abord été énoncé par Chasles (*Bulletin des Sciences mathematiques de Férussac,* t. XXIV, p. 321; 1830). Le Mémoire complet ne fut publié qu'en 1878 sous le titre : *Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. VI, p. 208).

c'est-à-dire que *toutes* les cordes des points de σ sont égales et parallèles entre elles. Il suffit donc d'une simple translation qui est donnée en grandeur et en direction par A_0A_1 ou B_0B_1 pour faire passer le système σ de σ_0 en σ_1. A moins d'une mention spéciale, ce cas sera toujours exclu par la suite.

3. Considérons maintenant deux positions g_0 et g_1 d'une droite g de σ. L'intersection de g_0 et g_1 est la position de deux points distincts A et B de g, suivant qu'elle est considérée comme faisant partie de g_0 ou de g_1 : appelons-la B_0 en tant que point de g_0; et A_1 en tant que point de g_1. Soient

Fig. 3.



A_0 la position de A sur g_0, B_1 celle de B sur g_1. Comme $A_0B_0 = A_1B_1$, les points milieux A_m et B_m sont les positions d'un même point de g que nous désignerons par G_0 et G_1 ; la ligne qui les joint sera g^m ; elle fait des angles égaux avec g_0 et g_1.

Les cordes de tous les points de g enveloppent une parabole qui a g_0, g_1, g^m pour tangentes. Les tangentes à une parabole déterminent sur deux tangentes fixes des ponctuelles semblables; si donc C est un point choisi à volonté sur g, sa

corde C_0C_1 sera divisée en deux parties égales par g^m, c'est-à-dire que C^m est sur g^m. Mais on a démontré que la perpendiculaire abaissée de O sur C_0C_1 passe par C^m. Donc, toute corde peut être considérée comme l'un des côtés d'un angle droit dont l'autre côté passe par O et dont le sommet est toujours sur g^m. On a donc le théorème :

Les milieux des cordes de tous les points d'une droite g sont sur une droite g^m qui fait des angles égaux avec g_0 et g_1. Les cordes elles-mêmes enveloppent une parabole dont le foyer est au centre de rotation, et dont la droite g^m est la tangente au sommet.

On appellera cette droite g^m la *médiane* de g.

Projetons la corde C_0C_1 sur g^m. La projection de C_0C_1 est égale à celle du contour $C_0B_0C_1$. Comme g_0 et g_1 font des angles égaux avec g^m, les projections de C_0B_0 et de C_1B_1 sont égales et de sens contraires. Donc la projection de toute corde est égale à celle de B_0B_1, ou égale à G_0G_1, c'est-à-dire que :

Les projections des cordes de tous les points d'une droite sur la médiane sont constantes, et égales à la corde qui coïncide avec la médiane.

4. Les théorèmes précédents font voir qu'à chaque point A_0 correspond un point A^m, et à chaque droite g_0 une droite g^m. Mais l'angle de g_0 et de g^m est égal à $\frac{1}{2} \wedge (G_0 O G_1)$, c'est-à-dire qu'il est égal à la moitié de l'angle dont il faut faire tourner σ pour passer de la position σ_0 à la position σ_1. L'angle d'une droite avec sa médiane est donc constant. D'où il suit que deux droites g_0 et h_0 se coupent toujours sous le même angle que leurs médianes g^m et h^m.

Le système σ_0, et celui σ^m formé par les milieux des cordes, sont des systèmes semblables qui ont en commun le centre de rotation, lequel se correspond à lui-même.

5. Les résultats précédents sont indépendants des positions respectives de σ_0 et σ_1. Si ces positions deviennent infiniment voisines, les théorèmes énoncés plus haut donnent naissance à des propositions applicables à chaque instant au mouvement

d'un système plan dans son plan. La corde A_0A_1 devient la tangente à la trajectoire, et a^v devient la normale.

Donc :

Lorsqu'un système plan se déplace d'une manière quelconque dans son plan, les normales aux trajectoires de tous les points passent à chaque instant par le même point.

Le système exécute à l'instant considéré une rotation infiniment petite autour de ce point. On l'appelle *centre* ou *pôle instantané de rotation* [1].

Nous pouvons dire encore que :

Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite g de σ enveloppent à chaque instant une parabole qui a le centre instantané pour foyer, et la droite g pour tangente au sommet.

6. Nous allons rattacher aux études précédentes, dans lesquelles on ne s'est occupé que des trajectoires des points, la recherche des enveloppes des droites et des courbes du système.

Nous commencerons encore par supposer données des positions σ_0, σ_1, σ_2 du système. Conjointement, nous considérerons les systèmes semblables σ_0^m, σ_1^m, définis plus haut. σ_0^m sera le système formé par les milieux A_0^m des cordes A_0A_1, σ_1^m celui des milieux de A_1A_2. Désignons par O_{01} le centre de rotation de σ_0 et σ_1. Par la considération de ces systèmes, nous pourrons démontrer en toute rigueur les théorèmes qui se rapportent au mouvement continu.

La raison en est que les propriétés de σ_0^m, σ_1^m sont indépendantes des positions relatives de σ_0, σ_1, σ_2, et subsistent pour un déplacement infiniment petit de σ. Comme à la limite σ_0^m

---

(1) C'est Bernoulli qui découvrit l'existence du centre instantané de rotation pour le mouvement le plus général d'un système plan dans son plan : *De centro spontaneo rotationis* (*Opera*, t. IV, p. 265 ; 1742).

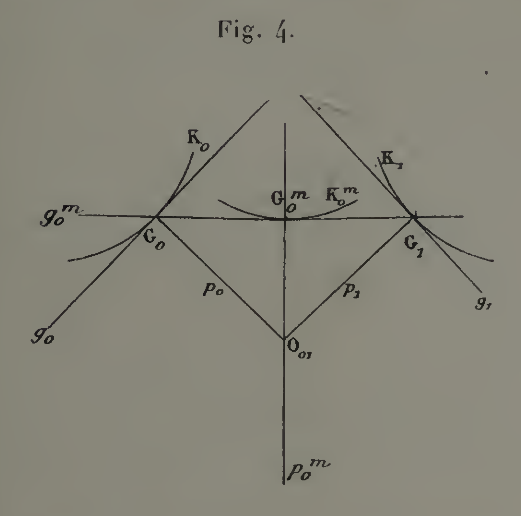
Descartes avait déjà énoncé plus de cent ans auparavant ce théorème que : *lorsqu'une courbe roule sur une autre, les normales aux trajectoires de tous les points passent par le point de contact instantané* (*Œuvres de Descartes,* édition Cousin, t. VII, p. 88; 1638).

se confond avec σ_0, on pourra déduire des propriétés *invariables* des systèmes σ_0^m et σ_1^m des théorèmes applicables à σ lui-même à chaque instant du mouvement.

7. Soit encore g_0 une droite de σ_0 et g_0^m et g_1 les droites correspondantes de σ_0^m et σ_1. Les points où g_0 et g_1 sont coupées par g_0^m (I, 3) sont des points correspondants G_0, G_1 (voir *fig.* 3), et la perpendiculaire abaissée de O_{01} sur g_0^m passe par G_0^m. La similitude des systèmes σ_0, σ_0^m, σ_1, nous montre que les perpendiculaires abaissées de O_{01} sur g_0 et g_1 coupent ces droites en G_0 et G_1, et que les trois perpendiculaires sont des droites homologues des trois systèmes. Ceci a lieu quelle que soit la position relative de g_0 et g_1. Si le déplacement de σ devient infiniment petit, le point G_0^m se confondra avec le point de contact instantané de la droite g_0 et de l'enveloppe, et la perpendiculaire abaissée du centre de rotation sur g_0^m devient la normale à l'enveloppe. Mais cette perpendiculaire passe toujours par G_0^m, c'est-à-dire que la perpendiculaire abaissée du centre instantané de rotation sur une droite du système coupe celle-ci au point où elle touche son enveloppe à l'instant considéré.

Le même théorème a lieu pour l'enveloppe d'une courbe quelconque K de σ. Soient (*fig.* 4) K_0 et K_1 ses positions dans

Fig. 4.



σ_0 et σ_1, et soit K_0^m la courbe correspondante de σ_0^m. Par le centre de rotation, menons une normale p_0^m à K_0^m, et soit g_0^m

la tangente à K_0^m au point d'intersection G_0^m. Construisons les points et les droites correspondantes de σ_0 et σ_1. Alors g_0 touchera la courbe K_0 en G_0, et g_1 la courbe K_1 en G_1. D'ailleurs G_0 et G_1 sont les points d'intersection de g_0^m avec g_0 et g_1.

Les droites p_0 et p_1 sont des normales à K_0 et K_1 en G_0 et G_1 et sont donc perpendiculaires sur g_0 et g_1. Ceci a lieu quelle que soit la position relative des systèmes σ_0 et σ_1 et, par conséquent, pour un déplacement infiniment petit. Si nous passons à la limite, g_0^m deviendra la tangente à l'enveloppe de K, et G_0^m sera le point de contact. Donc la normale à l'enveloppe de K passe par le centre instantané de rotation.

Par suite, on a le théorème :

Lorsqu'un système plan se déplace d'une manière quelconque dans son plan, les normales menées aux enveloppes des droites et des courbes du système aux points de contact avec l'enveloppée passent par le centre instantané de rotation.

8. Considérons maintenant toutes les droites passant par un point quelconque A de σ. Le point où chacune de ces droites touche son enveloppe est à l'intersection de cette droite et de la perpendiculaire abaissée sur elle du centre instantané. Le lieu de ces points est un cercle, car il est engendré par deux faisceaux de rayons O et A tels que deux rayons correspondants soient perpendiculaires l'un sur l'autre.

Donc :

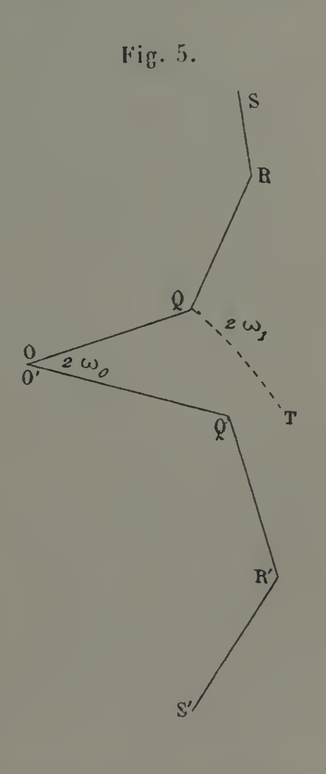
Les points où les droites d'un faisceau touchent leur enveloppe sont à chaque instant sur un cercle qui a pour diamètre la droite qui joint le centre instantané au centre du faisceau.

II. — Les courbes polaires et l'inversion du mouvement.

1. Supposons que le système σ effectue successivement des rotations $2\omega_0, 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots$ autour de points O', Q', R' donnés arbitrairement dans le plan fixe. De la position initiale σ_0, il passe successivement aux positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$. Déterminons

dans la position initiale (*fig.* 5) le point Q de telle manière que $QO' = Q'O'$ et que $\wedge(QO'Q') = 2\omega_0$, puis menons par Q la droite QT telle que $\wedge(TQO') = \wedge(R'Q'O')$. Dans le système mobile plaçons encore le point R de telle manière que $RQ = R'Q'$ et que $\wedge(RQT)$ soit égal à $2\omega_1$, etc. Désignons encore le point O' par O en tant que point de σ. Nous aurons ainsi obtenu dans σ un polygone bien déterminé, OQRS, dont les côtés sont respectivement égaux à ceux de O'Q'R'S'. Si maintenant σ tourne autour de O' de l'angle $2\omega_0$, Q viendra coïncider avec Q'; la rotation suivante $2\omega_1$ effectuée autour de Q' amène R et R' en coïncidence, etc. Le mouvement a donc lieu de telle façon que le polygone OQRS roule pour ainsi dire sur O'Q'R'S'.

Fig. 5.



2. Les théorèmes précédents sont indépendants du nombre des systèmes considérés, et de leurs positions relatives. Ils ont donc lieu encore lorsque les systèmes σ_0, σ_1, σ_2, ... se rapprochent autant qu'on voudra de façon que σ se déplace d'une manière continue dans son plan. Les deux polygones se transforment alors en courbes. Le polygone O'Q'R'S' devient la courbe $\mathfrak{C}'$ du plan fixe dont les points seront, dans le courant du mouvement, les centres instantanés de rotation; le polygone OQRS deviendra le lieu des points du système mobile, qui, pendant le déplacement, coïncideront avec les centres instantanés de rotation. Le mouvement lui-même a lieu de telle façon que la dernière courbe, que nous désignerons par $\mathfrak{C}$, roule sur la courbe $\mathfrak{C}'$ du plan fixe.

Il faut toutefois supposer que les centres de rotation ne tombent pas à l'infini, c'est-à-dire que le mouvement ne consiste pas en une simple translation, auquel cas tous les points du système décrivent à chaque instant des éléments parallèles de trajectoires. On peut dire alors que :

Tout mouvement d'un système plan dans son plan, qui ne consiste pas en une simple translation, peut être engendré par le roulement d'une courbe du plan mobile sur une courbe du plan fixe (¹).

Chacune de ces courbes a été définie comme le lieu géométrique des centres instantanés de rotation; on les appellera les *courbes polaires*. Le théorème qui vient d'être démontré fait voir que la nature du mouvement dépend uniquement du choix des courbes polaires. On peut se donner celles-ci arbitrairement. Inversement, il est évident que le mouvement de σ est déterminé à chaque instant quand on connaît les deux courbes polaires. Les deux polygones considérés plus haut représentent aussi deux courbes qui définissent un certain genre de mouvement pour σ. Nous conviendrons toutefois de ne considérer à l'avenir que des mouvements tels que le centre instantané se déplace à chaque moment. En dehors des mouvements de translation nous exclurons donc encore ceux pour lesquels le centre de rotation reste le même pendant un temps fini.

Nous le faisons parce que dans ces deux cas les problèmes que nous avons à traiter perdent leur intérêt, et que certains d'entre eux cessent même d'exister.

3. Nous avons admis jusqu'ici que le système σ se déplace dans le plan fixe σ'. Imaginons maintenant un observateur invariablement lié au système σ; pour lui le plan σ' se déplacera dans le plan σ. Le mouvement de σ' dans σ sera appelé le mouvement *inverse* ou *indirect*. Au contraire, le mouvement de σ dans σ' sera le mouvement *primaire* ou *direct*. Ces mouvements ont des relations intimes; nous aurons donc souvent à les étudier simultanément (²).

(¹) Ce théorème est dû à Cauchy (1827), *Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 75. (*Voir* aussi les *Œuvres complètes de Cauchy*, IIᵉ série, t. VII.) Deux ans plus tard, Chasles le retrouva à son tour. *Voir* le Mémoire cité plus haut, p. 236.

(²) L'idée de considérer en même temps que le mouvement primitif le mouvement inverse est due à Chasles.

Il est vrai qu'il ne s'agissait pour lui que de faire remarquer un certain dualisme dans le tracé (*Aperçu historique*, p. 409). L'utilité théorique de ces considérations fut aperçue d'abord par Aronhold (*Principes de la Géo-*

Quant aux notations qui se rapportent au mouvement indirect, nous ferons les conventions suivantes :

De même qu'on a désigné par σ_0, σ_1, σ_2 les positions de σ dans σ', les positions correspondantes de σ' dans σ seront $\sigma'_0, \sigma'_1, \sigma'_2$. C'est-à-dire que, soit, à un instant quelconque, σ_m la position de σ dans σ', la position de σ' par rapport à σ sera désignée par σ'_m. De plus, nous sommes convenus de désigner par A, B, C des points déterminés du plan σ sans tenir compte de leur position dans σ', et nous avons désigné par A_0, A_1, A_2 les positions que A occupera successivement dans σ'. D'une manière analogue, les points du plan σ' seront désignés par C', D', ... quand il ne s'agira de les définir que comme points déterminés de σ'. Et C'_0, C'_1, C'_2, ... seront encore les positions successives de C' dans σ, C'^m sera le point milieu de $C'_0 C'_1$, et c'^v sera le rayon normal correspondant.

Par suite de ces conventions, nous verrons dans A_0, A_1, A^m, a^v, g_0, g^m des points et des droites déterminés du plan σ', et dans C'_0, C'_1, C'^m, c^v, h'_0, h'^m des points et des droites déterminés de σ.

Si le mouvement est continu, tout point A de σ décrira une courbe a' située sur σ'. Dans le mouvement indirect de σ' sur σ la courbe a' passera toujours par le point fixe A. De même, si une courbe b de σ jouit de la propriété de passer toujours par un point fixe B' pendant la durée du mouvement, le point B' décrira sur σ la courbe b lors du déplacement indirect. Ceci peut être utilisé pour obtenir un double tracé mécanique des courbes. Imaginons en effet un style fixé en A. Il tracera la courbe a', même lorsque, A restant fixe, nous déplaçons σ' par rapport à σ.

4. On vient de démontrer que le mouvement de σ dans σ' est obtenu par le roulement sans glissement d'une courbe $\mathfrak{C}$ appartenant à σ sur une courbe $\mathfrak{C}'$ appartenant à σ'. Mais, comme le caractère géométrique du mouvement est indépendant de notre position soit dans σ', soit dans σ, il est évident que le mouvement de σ' dans σ consiste en un roulement de

---

métrie cinématique, in *Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbefleisses,* LI Jahrgang, p. 129).

la courbe $\mathfrak{C}'$ sur $\mathfrak{C}$. Nous voyons donc que les deux courbes ont absolument la même signification géométrique et qu'il est légitime de leur donner la même appellation comme on l'a fait plus haut. On peut présenter des considérations analogues lorsque l'on envisage spécialement quelques-unes des positions du système σ dans σ', σ_0, σ_1 ou σ_2. Les positions correspondantes de σ' dans σ devront, d'après ce qui a été dit plus haut, être désignées par σ'_0, σ'_1, σ'_2. Pour amener le système σ_0 à coïncider successivement avec σ_1, σ_2, nous avons fait (II, 1) rouler le polygone OQRS sur O'Q'R'S', de telle façon que σ tourne successivement de $2\omega_0$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, autour de O', Q', R', S', pendant que, par suite de ces rotations, Q, R, S viennent en coïncidence avec Q', R', S'. Nous allons encore utiliser ce principe, qu'il est indifférent pour la nature du mouvement que nous nous trouvions dans σ ou dans σ'. Le mouvement que σ' effectue dans σ doit donc consister dans un roulement du polygone O'Q'R'S' sur OQRS, c'est-à-dire que σ' effectue successivement des rotations dont la grandeur est également $2\omega_0$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, et ces rotations se font autour de O, Q, R, ..., pendant que Q', R', S', ... viennent successivement en coïncidence avec Q, R, S.

5. Pendant le mouvement relatif des deux systèmes, chaque point A de σ décrit une trajectoire située dans σ', de même chaque point B de σ' parcourt une trajectoire située dans σ. Les normales à ces trajectoires ont à chaque instant certaines relations entre elles; ce sont ces relations que nous allons étudier.

Pour les établir rigoureusement, nous partirons encore de positions arbitrairement données du système. Soient σ_0, σ_1 ces positions, A_0, A_1 les positions du point A de σ et soit a^{ν} le rayon normal correspondant. Soit de plus B'_0 un point quelconque de σ'_0 situé sur a^{ν}; il sera équidistant de A_0 et A_1. Mais cela doit être, soit que nous nous trouvions dans le plan σ', soit dans le plan σ; par conséquent B'_0 et B'_1 sont équidistants de A_0, c'est-à-dire que le rayon normal appartenant à B'_0 et B'_1 passe par A_0.

Nous avons donc le théorème :

Si le rayon normal a^{ν} d'un point A de σ passe par un point

B′ *de* σ', *dans le mouvement indirect, le rayon normal* $b^{\nu'}$ *de* B′ *passera par* A [1].

Et dans le cas d'un mouvement continu :

Si, à un moment déterminé, la normale à la trajectoire d'un point A *de* σ *passe par le point* B′ *de* σ', *la normale à la trajectoire de* B′ *dans le mouvement indirect passera par* A.

Les paragraphes suivants vont nous faire connaître de nouvelles relations importantes qui ont lieu entre les deux mouvements [2].

III. — La correspondance quadratique et les cercles des inflexions.

1. Soient maintenant $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ des positions arbitrairement choisies du système plan σ. Nous désignerons le centre de rotation de σ_0 et σ_1 par O_{01}, en tant que point de σ_1 et par O'_{01}, en tant que point de σ'_1. De même le centre de σ_1 et σ_2 sera désigné par O_{12} ou O'_{12}.

A_0^m sera le point milieu de A_0A_1, et A_1^m celui de A_1A_2. Enfin a_0^ν et a_1^ν sont les rayons normaux correspondants. Ces deux rayons normaux se coupent en un point A′ de σ' qui est le centre du cercle passant par A_0, A_1, A_2.

Si g_0 est une droite quelconque de σ_0, les rayons normaux a_0^ν de ses points A_0 forment un faisceau de rayons perspectif à la médiane g_0^m, son centre étant O'_{01}. De même, les rayons normaux a_1^ν forment un faisceau de rayons dont le centre est O'_{12}, et qui est perspectif à la médiane g_1^m. Les ponctuelles g_0^m et g_1^m sont semblables, étant semblables toutes deux à la ponctuelle g_1. Donc les deux faisceaux de rayons normaux sont projectifs ; ils engendrent une section conique située dans σ',

---

[1] Comme, d'après la définition B′ et a^ν sont des éléments bien déterminés de σ', et que A et $b^{\nu'}$ sont des éléments déterminés de σ, la propriété que possède a^ν de passer par B′, et celle de $b^{\nu'}$ de passer par A, sont indépendantes de la position réciproque des systèmes ; elles subsistent pour toutes les positions. C'est pourquoi on a supprimé les indices dans l'énoncé du théorème.

[2] Les propriétés du mouvement indirect ont été étudiées par M. Schœnflies (*Comptes rendus*, t. CI, p. 150).

et qui passe par les points fixes O'_{01} et O'_{12}. Le même raisonnement peut s'appliquer aux faisceaux de rayons normaux ayant O_{01} et O_{20} pour centres, et la conique qu'ils engendrent passe par O'_{01} et O'_{20}. Mais ces deux coniques ainsi engendrées n'en font qu'une, puisque, dans les deux cas, ce n'est autre chose que le lieu des points de rencontre A' des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle $A_0A_1A_2$. Donc, la conique, lieu des points A', passe par les trois points fixes O'_{01}, O'_{12} et O'_{20}. On remarquera, en outre, que, pour obtenir A', on peut se servir aussi, à la place du rayon normal $a_1^{\vee}$ de la perpendiculaire élevée sur le milieu de A_2A_0 et qui passe par O'_{20}.

De même qu'on peut faire correspondre de cette manière à chaque point A de σ un point déterminé A' de σ', l'inverse aura lieu aussi. On le démontre de la manière la plus commode en se servant de l'inversion du mouvement. De l'avant-dernier théorème du paragraphe précédent, il résulte en effet, que A_0 est le point d'intersection des rayons normaux $a_0^{\vee\prime}$ et $a_1^{\vee\prime}$ appartenant à A' dans le mouvement indirect. On le reconnaît d'ailleurs directement en considérant que si A'_0 est également distant de A_0, A_1, A_2, inversement A'_0, A'_1, A'_2 sont à égale distance de A_0. La signification géométrique des points A et A' est donc tout à fait réciproque.

On en déduit immédiatement qu'aux points d'une droite h' de σ' correspondent aussi dans σ les points d'une section conique qui est engendrée par l'intersection des faisceaux de rayons normaux appartenant à h' dans le mouvement indirect. Cette courbe passe toujours par les points O_{01}, O_{12}, O_{02}, qui sont les centres de rotation du mouvement indirect.

Deux systèmes que l'on adjoint de cette façon l'un à l'autre sont dits être en correspondance quadratique, et les points O_{12}, O_{20}, O_{01}, ou O'_{12}, O'_{20}, O'_{01} sont les *points principaux*.

Nous sommes donc arrivé au résultat suivant :

Si, à chaque point A de σ, nous faisons correspondre le point A' de σ', où se coupent les rayons normaux $a_0^{\vee}$ et $a_1^{\vee}$, le point A est en même temps le point de rencontre des deux rayons normaux $a_0^{\vee\prime}$ et $a_1^{\vee\prime}$ pour le mouvement inverse. Les deux systèmes ainsi obtenus sont en correspondance quadratique. Les

points principaux de σ' sont les trois centres de rotation directe; les points principaux de σ sont les trois centres de rotation indirecte.

2. La position de ces centres de rotation est déterminée par une loi simple à laquelle on parvient de la façon suivante :

Nous admettons, ce qui est toujours permis, que les points O'_{01} et O'_{12}, ainsi que les angles de rotation correspondants $2\omega_{01}$, $2\omega_{12}$, sont donnés arbitrairement, et que les systèmes plans occupent d'abord les positions relatives σ_0 et σ'_0. Dans cette hypothèse (*fig.* 6), O_{01} et O'_{01} coïncident, et les points O_{12} et O'_{12} sont situés de telle façon que l'on ait

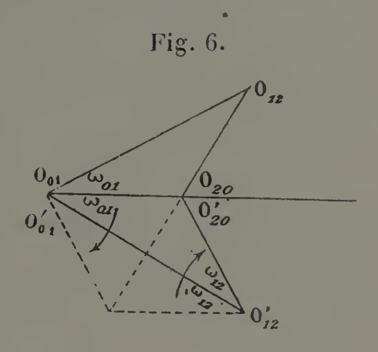


Fig. 6.

$$O_{01}O_{12} = O'_{01}O'_{12} \qquad \text{et} \qquad \wedge(O_{12}O'_{01}O'_{12}) = 2\omega_{01}.$$

Le point O_{20} est le centre de rotation commun à σ_2 et σ_0; on le détermine donc de telle façon que l'on ait en grandeur et en direction

$$\wedge(O_{12}O_{01}O_{20}) = \omega_{01} \qquad \text{et} \qquad \wedge(O_{20}O_{12}O_{01}) = \omega_{12}.$$

Dans ces conditions le point O_{20} reviendra, en effet, à sa position primitive quand σ aura tourné d'abord autour de O'_{01}, puis autour de O'_{12}. C'est donc le point commun à σ_0 et σ_2, qui se correspond à lui-même, c'est-à-dire le centre de rotation pour ces deux positions du système.

On déterminera de la même façon le centre de rotation O'_{20} du mouvement indirect. Mais les angles de rotation conservent la même grandeur $2\omega_{01}$ et $2\omega_{12}$ (II, 4); O'_{20} se trouvera encore sur la bissectrice de l'angle $\wedge(O'_{12}O'_{01}O_{12})$, et l'angle $\wedge(O'_{20}O'_{12}O'_{01}) = \omega_{12}$, c'est-à-dire que O'_{20} coïncide avec O_{20}.

Donc : *Le triangle formé par les centres de rotation directe et celui formé par les centres du mouvement indirect sont des figures symétriques.*

3. Comme, à chaque droite de l'un des systèmes qui ne passe pas par un des points principaux correspond dans l'autre système une section conique qui passe toujours par les points

principaux, cela aura lieu aussi pour la droite de l'infini de chacun des deux systèmes. Mais chaque point A′ de σ' est le point de rencontre des rayons normaux $a_0^{\vee}$ et $a_1^{\vee}$ du point A; les points A de σ qui correspondent à la droite de l'infini de σ' sont donc tels que pour eux $a_0^{\vee}$ et $a_1^{\vee}$ sont parallèles, et, par suite, A_0, A_1 et A_2 sont en ligne droite. Il y a donc une infinité de points A du système σ pour lesquels A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite, et leur ensemble constitue une conique qui passe par les points principaux.

Les choses se passent d'une manière analogue pour σ'.

A la droite de l'infini de σ correspond une conique passant par les points principaux de σ' et chacun des points B′ de cette conique est tel que, pour lui, $b_0^{\vee\prime}$ et $b_1^{\vee\prime}$ sont parallèles, autrement, que B'_0, B'_1, B'_2 sont en ligne droite.

4. La corde $A_0A_1A_2$, qui contient les trois positions consécutives du point A, est une droite du système σ'. Désignons-la par a'; dans le mouvement indirect a' jouira de cette propriété que a'_0, a'_1, a'_2 se coupent toutes les trois en A. Cela est vrai pour les cordes de tous les points A que nous avons considérés. Inversement, si a' est une droite du système σ', qui, pour les trois positions du système, passe par un même point de σ, ce sera une de ces cordes. De même, les cordes des points analogues B′ de σ' sont les droites du système σ qui jouissent de la même propriété.

On peut facilement déterminer ces droites dans chacun des deux systèmes. Faisons-le pour σ'. Soit donc S'_0 le centre d'un faisceau quelconque de rayons de σ'_0, et S'_1 le centre du faisceau homologue de σ'_1; les points d'intersection des rayons correspondants sont sur un cercle qui passe par S'_0 et S'_1. Sur ce cercle se trouve aussi le centre de rotation O'_{01}, car, si l'_0 est le rayon du faisceau S'_0, qui passe par O'_{01}, l'_1 passera aussi par O'_{01}. De même, les deux faisceaux correspondants de σ'_1 et σ'_2 dont les centres sont S'_1 et S'_2 engendrent un cercle qui passe par S'_1, S'_2 et O'_{12}.

Les deux cercles passent par S'_1. Ils ont donc, en général, encore un point commun différent de S'_1, et ce point est le point d'intersection de trois rayons correspondants a'_0, a'_1, a'_2 des faisceaux de rayons, c'est-à-dire que, par chaque point S′ de σ',

il passe, en général, une droite a' telle que les trois positions a'_0, a'_1, a'_2 se coupent en un même point A de σ. Ces droites forment donc un faisceau du premier ordre. La même chose a lieu pour σ, et il suit de là que :

Toutes les droites de chaque système, qui pour trois positions arbitrairement choisies du système passent par un même point, forment un faisceau du premier ordre.

5. Soit R′ le centre du faisceau de σ'. Par définition, chacune des droites qui composent le faisceau est une corde $A_0A_1A_2$ d'un point A. Elle contient donc aussi A_0''' et A_1'''. Si de O'_{01} nous abaissons une perpendiculaire sur A_0A_1, elle passera par A_0'''. L'ensemble des points A_0''' forme donc un cercle qui résulte de l'intersection de rayons perpendiculaires entre eux. Les centres des deux faisceaux sont O'_{01} et R′; donc $O'_{01}R'$ est le diamètre du cercle que nous désignerons par w_{012}'''. Mais σ et σ_0''' étant des systèmes semblables, les points A de σ sont également sur un cercle qui passe par les points principaux. On l'appellera le *cercle des inflexions du mouvement direct*, w_{012}.

Les résultats correspondants s'appliquent aux points B′ de σ'. Ils forment le *cercle des inflexions du mouvement indirect*, qui sera désigné par w'_{012}. Les deux triangles formés par les points principaux sont des figures symétriques; donc les deux cercles ont même diamètre, et l'on a le théorème :

Étant donnés trois couples de positions relatives quelconques des deux systèmes plans, il existe dans chaque système une infinité de points qui jouissent de cette propriété que, pour chacun d'eux, les trois positions consécutives appartiennent à une même droite. Ces points forment, dans chacun des systèmes, le cercle circonscrit aux points principaux. Les deux cercles ont même rayon.

6. Si les trois systèmes plans σ_1, σ_2, σ_3 n'étaient pas égaux entre eux, comme ici, mais simplement en collinéation, tous les points de chaque système, pour lesquels les trois positions correspondantes A_0, A_1, A_2 appartiennent à la même droite seraient sur une même courbe du troisième ordre. Cette courbe se décompose pour les systèmes égaux dont nous nous occu-

pons et nous donne le cercle des inflexions et la droite de l'infini. Car, tout point de cette droite restant à l'infini pendant le déplacement, il est évident que cette droite fait partie de la courbe.

De même, il existe pour trois systèmes collinéaires $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, une courbe de troisième classe, formée par les droites a pour lesquelles les trois positions a_0, a_1, a_2 se coupent en un point. Pour des systèmes égaux, cette courbe se décompose en trois faisceaux de rayons, mais desquels l'un seulement est réel.

Nous déterminerons les deux autres faisceaux par les considérations suivantes : On sait que deux systèmes collinéaires superposés ont en général trois points unis et trois droites unies. Pour des systèmes égaux un point et une droite seuls sont réels, le pôle de rotation et la droite de l'infini. Imaginons le faisceau de rayons appartenant à σ_0, dont le centre est en O ; le faisceau correspondant de σ_1 aura son centre également en O. Les deux faisceaux étant égaux, ils ont deux rayons unis, et ce sont les droites isotropes. Chacun des points cycliques est donc un point des deux systèmes qui se correspond à lui-même.

Ce qui vient d'être dit est vrai pour des positions arbitraires du système, par conséquent pour un déplacement continu. Ainsi, pendant que le centre réel de rotation varie continuellement, les points unis imaginaires restent invariablement les mêmes pour toutes les positions du système. Donc :

Dans le mouvement d'un système plan dans son plan, deux points, à savoir les points cycliques, restent immobiles.

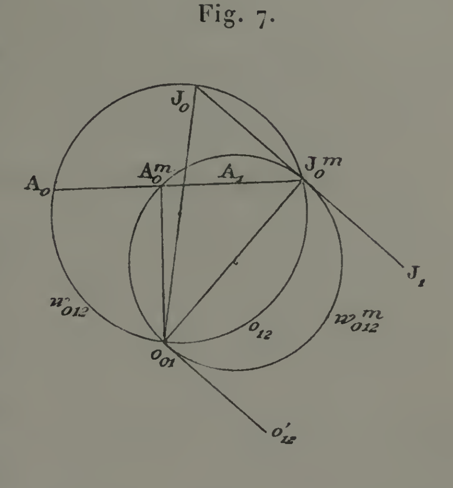
D'ailleurs ce théorème résulte de ce fait que tous les cercles du plan passent par les points cycliques ; ceci a donc lieu aussi pour les différentes positions K_0, K_1, K_2, ... du même cercle K de σ.

Maintenant il s'ensuit aussi que tout rayon passant par un de ces points appartient à la catégorie de ceux qui passent par le même point pour trois positions consécutives du système. Par conséquent, la courbe de la troisième classe, dont il a été fait mention plus haut, se décompose en trois faisceaux.

7. Toutes les cordes $A_0A_1A_2$ passent par un même point du

cercle, comme on vient de le démontrer. Ce point est à l'autre extrémité du diamètre qui passe par O_{01} (*fig.* 7). Considéré comme point de σ_0^m, on le désignera par J_0^m. A ce point correspond dans σ un point J du cercle des inflexions w_{012}, qui est celui dont la corde J_0J_1 est bissectée par J_0^m. Comme $J_0^m O_{01}$ est un diamètre du cercle w_{012}^m, J_0J_1 en est une tangente.

Fig. 7.



Le point J_0^m est également situé sur le cercle des inflexions w_{012}, car J_0^m est sur J_0J_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de O_{01} sur cette droite. Mais J_0O_{01} est un diamètre du cercle w_{012}, donc il faut que J_0^m soit un point de ce cercle. Nous l'appellerons le centre des inflexions.

Donc : *les cordes de tous les points du cercle des inflexions passent par un point de ce cercle qui est le centre des inflexions.*

Le point analogue existe pour le mouvement inverse sur le cercle des inflexions w'_{012} de σ'. C'est le point d'intersection des cordes de tous les points de w'_{012} ; on l'appellera le *centre des inflexions du mouvement inverse.* En nous servant de ces dénominations, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si l'on se donne trois positions des deux systèmes plans, le centre des inflexions du mouvement inverse est le centre du faisceau formé par les droites a de σ pour lesquelles les trois positions a_0, a_1, a_2 sont concourantes. L'ensemble des points de concours forme le cercle des inflexions du mouvement inverse. Le centre des inflexions et le cercle des inflexions du mouvement direct ont même signification relativement à σ'.

Les droites des deux faisceaux seront appelées *droites de rebroussement.*

8. Considérons en dehors des trois positions σ_0, σ_1, σ_2 une quatrième position σ_3; aux systèmes σ_1, σ_2, σ_3 correspondra

également un cercle des inflexions qui passera par O_{23}, O_{31}, O_{12}. Les deux cercles w_{012} et w_{123} ont donc en commun le point O_{12} et, en général, se couperont encore en un point A différent de celui-ci. Ce point est caractérisé par le fait que A_0, A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite, tandis que ceci n'a pas lieu, en général, pour le point O_{12}. Le même raisonnement s'applique, pour σ', au point B', autre que O'_{12}, en lequel se coupent les cercles w'_{012} et w'_{123}.

Donc : *étant données quatre positions σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 du système plan σ, il existe un point bien déterminé A de ce système tel que A_0, A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite. C'est le point d'intersection différent de O_{12} des cercles des inflexions w_{012} et w_{123}. Le point analogue existe dans σ' pour le mouvement inverse.*

La corde $A_0A_1A_2A_3$ en tant que droite a' de σ' jouit de cette propriété que les quatre positions a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 passent toutes par le point A. C'est la ligne de jonction des deux centres des inflexions du mouvement direct. De même, la ligne qui joint les centres des inflexions du mouvement indirect est celle qui, dans le mouvement direct, passe par le même point pour quatre positions consécutives de σ.

En conséquence : *Si quatre positions σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 du système σ sont données arbitrairement, il existe dans ce système une certaine droite qui, pour les quatre positions données, passe par le même point. Dans σ' il existe une droite qui jouit de la même propriété relativement au mouvement inverse.*

9. Concevons maintenant que les positions σ_0, σ_1, σ_2 se rapprochent indéfiniment, nous obtiendrons des théorèmes que l'on peut appliquer à chaque instant au mouvement d'un système plan. Les points A' deviennent alors les centres de courbure des trajectoires décrites par les points A, et de même A deviendra le centre de courbure de la trajectoire décrite par A' dans le mouvement inverse. Chaque point du cercle des inflexions passe par un point d'inflexion de sa trajectoire. Les points principaux dans chacun des deux systèmes se rapprochent indéfiniment et, à la limite, ils coïncident avec le centre instantané de rotation. Enfin les droites $O_{01}O_{12}$ et $O'_{01}O'_{12}$ se confondent avec la tangente commune aux courbes polaires.

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Si un système plan se déplace dans un plan σ', et que A' soit un centre de courbure de la trajectoire décrite par A, *le point* A *sera le centre de courbure de la trajectoire décrite par* A' *dans le mouvement indirect. Si nous faisons correspondre ces points* A *et* A', *les systèmes σ et σ' ainsi obtenus sont en correspondance quadratique. Les points principaux et les lignes principales des deux systèmes coïncident tous, les points principaux avec le centre instantané de rotation et les lignes principales avec la tangente commune aux courbes polaires.*

Le lieu de tous les points des systèmes σ ou σ' qui passent par des points d'inflexion de leurs trajectoires est, à chaque instant du mouvement, un cercle qui touche la tangente commune des courbes polaires au centre instantané de rotation. Les deux cercles ont même rayon et sont situés de part et d'autre de la tangente (¹).

Nous désignerons ces deux cercles par w et w'.

10. Le centre des inflexions J_0^m coïncide à la limite avec J; c'est le point autre que O où la normale à la courbe polaire coupe le cercle des inflexions w. Le point d'intersection de cette normale et de w' est le centre instantané des inflexions pour le mouvement inverse. Chaque droite passant par ce point, considérée comme droite de σ, jouira en général de cette propriété que son enveloppe présente un point de rebroussement au point de contact momentané. La même chose a lieu dans le mouvement indirect pour les droites de σ' passant par J. Donc :

Les tangentes aux points d'inflexion passent à chaque instant par un même point qui est le centre instantané des inflexions. Il y a, à chaque instant, dans le système plan σ une infinité de droites qui touchent leur enveloppe en des points de

(¹) Le cercle des inflexions fut découvert par de la Hire. Voyez *Traité des roulettes* (*Mém. de l'Acad. roy. de Paris*, p. 348; 1706). Bresse le définit comme le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est momentanément nulle (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXV, p. 89).

rebroussement de cette courbe. Ces droites forment un faisceau de rayons dont le centre est le centre des inflexions du mouvement indirect. Le lieu des points de rebroussement est le cercle des inflexions de σ' ([1]).

11. Le point A, qui est tel que A_0, A_1, A_2, A_3 appartiennent à la même droite, se transforme pour deux systèmes infiniment rapprochés en un point qui passe par un point d'ondulation de sa trajectoire. C'est l'un des deux points où deux cercles des inflexions consécutifs se coupent. L'autre point d'intersection est le centre instantané de rotation. Mais celui-ci passe précisément par un point de rebroussement de sa trajectoire.

Donc :

L'enveloppe des cercles des inflexions se compose de deux parties dont la signification géométrique est bien différente. L'une d'elles est la courbe polaire du système; ses points jouissent de la propriété de décrire des trajectoires à points de rebroussement (première espèce), la seconde est le lieu des points du système dont les trajectoires passent par des points d'ondulation ([2]).

De même, une droite du faisceau formé par les droites de rebroussement jouira, en général, de la propriété de passer par un même point pour quatre positions du système infiniment rapprochées. Car, si nous supposons tracée dans σ la courbe dont les points viennent, au cours du mouvement, coïncider avec les centres des inflexions de σ', la tangente à cette courbe, considérée comme droite de σ, passe par un même point pour quatre positions consécutives.

Les théorèmes analogues ont lieu pour le mouvement inverse.

([1]) Aronhold reconnut d'abord la liaison qui existe entre les cercles des inflexions et les points de rebroussement des enveloppes (*Principes,* etc.).

([2]) Ball a attiré l'attention sur les points d'ondulation : *Notes on applied mechanics* (*Proceedings of the Royal Irish Acad.,* 2e série, t. I, p. 243; 1871).

Everett montra que l'enveloppe des cercles des inflexions se décompose en deux courbes de significations différentes : *Kinematics of a rigid body* (*Quarterly journal,* t. XIII, p. 61).

12. La correspondance quadratique des systèmes σ et σ' est la source d'un grand nombre de théorèmes sur les points du système et les centres de courbure de leurs trajectoires. On les obtient facilement en se servant des propriétés connues de la correspondance quadratique. Nous ne mentionnerons ici que le cas le plus simple, et nous considérerons une droite de l'un des deux systèmes, de laquelle nous supposerons qu'elle ne passe pas par le centre instantané de rotation. Dans ce cas, la courbe correspondante, sur laquelle se trouvent les centres de courbure, est une section conique. Pour étudier sa position par rapport au point principal et à la ligne principale, c'est-à-dire par rapport au centre instantané de rotation et à la tangente à la courbe polaire, nous reviendrons encore au cas où l'on considère deux positions quelconques du système. Nous avons vu que toutes les coniques de l'un des systèmes qui correspondent aux droites de l'autre système passent par les trois points principaux, et que, parmi elles, se trouve le cercle circonscrit au triangle des points principaux. Si les positions du système se rapprochent indéfiniment, le cercle des inflexions conserve toujours la propriété d'avoir en commun avec chacune de ces coniques les trois points principaux; dans la position limite, le cercle des inflexions deviendra le cercle osculateur à chacune des coniques au centre instantané de rotation.

On reconnaît facilement quel est le genre d'une pareille conique. Si, par exemple, g est une droite de σ, la conique correspondante de σ' sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que g a 0, 1 ou 2 points communs avec le cercle des inflexions w de σ. La même chose se produit pour les droites de σ' et les coniques de σ qui leur correspondent.

Par conséquent :

Pour toutes les droites d'un des systèmes qui ne passent pas par le centre instantané de rotation, les centres de courbure des trajectoires sont sur une section conique qui passe par le centre de rotation et qui a pour cercle osculateur en ce point le cercle des inflexions de l'autre système. La conique est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant que la droite coupe le cercle des inflexions de son système en 0, 1 *ou* 2 *points.*

Les sections coniques sont donc, dans chacun des systèmes, osculatrices entre elles au centre instantané de rotation. Leur ensemble forme donc à chaque fois un réseau de coniques. Les coniques situées dans σ' sont projectives à toutes les droites de σ, et de même les coniques du réseau situées dans σ sont projectives aux droites de σ'. Pour des positions spéciales de la droite, la conique qui lui correspond peut dégénérer. En effet, si la droite du système passe par le point principal, c'est-à-dire par le centre instantané de rotation, la conique se décompose; nous obtenons à sa place la droite principale, c'est-à-dire la tangente à la courbe polaire et une autre droite. Si nous regardons enfin la tangente à la courbe polaire comme une droite de σ, il ne lui correspond dans σ' que le point principal, c'est-à-dire que le centre instantané de rotation. Donc le centre de courbure pour chaque point de la tangente à la courbe polaire est le centre instantané de rotation, et ceci a lieu pour le mouvement direct aussi bien que pour le mouvement indirect.

13. Le cercle des inflexions de chaque système est, par définition, le lieu des points du système qui passent par un point d'inflexion de leur trajectoire. Nous le retrouverons plus tard (VI) en nous plaçant à un autre point de vue. Mais nous voulons encore faire remarquer ici une propriété qui découle immédiatement de la correspondance quadratique. Le cercle des inflexions de σ est la conique qui correspond à la droite de l'infini de σ', c'est-à-dire que le cercle des inflexions de σ peut être considéré comme le lieu des centres de courbure pour les points infiniment éloignés de σ'; de même le cercle des inflexions de σ' peut être considéré comme le lieu des centres de courbure pour les points infiniment éloignés de σ.

IV. — Constructions et relations métriques.

1. Le mouvement d'un système étant défini d'une manière quelconque, il s'agira, à chaque instant du déplacement, de construire le centre instantané de rotation, la tangente à la courbe polaire, les cercles des inflexions et le centre de courbure de la trajectoire de chaque point. Nous sommes en mesure

de déduire les constructions dont il faudra faire usage dans chaque cas particulier des lois générales qui ont été établies dans les paragraphes précédents.

Le mouvement d'un système plan est déterminé dès que l'on connaît à chaque instant le centre de rotation. Ce point est à l'intersection des normales aux trajectoires de tous les points du système; il est donc déterminé par deux quelconques d'entre elles. Il faut alors qu'à chaque instant on donne les trajectoires de deux points quelconques. Le système se déplacera d'une manière bien déterminée, dès que deux de ses points seront forcés de parcourir des trajectoires données qui peuvent être choisies arbitrairement.

Pour construire à chaque instant, en dehors du centre de rotation, la tangente à la courbe polaire ainsi que les cercles des inflexions et les centres de courbure de toutes les trajectoires, nous aurons besoin de connaître la correspondance quadratique qui caractérise l'instant considéré du mouvement. Comme nous venons de voir que les trajectoires de deux points définissent complètement le mouvement, nous devons nous attendre à ce que cette correspondance soit déterminée dès que nous connaîtrons les centres de courbure de deux points. En effet, nous verrons que, si deux couples (A, A'), (B, B') de points correspondants sont donnés, on peut construire le centre de courbure C' correspondant à tout autre point C.

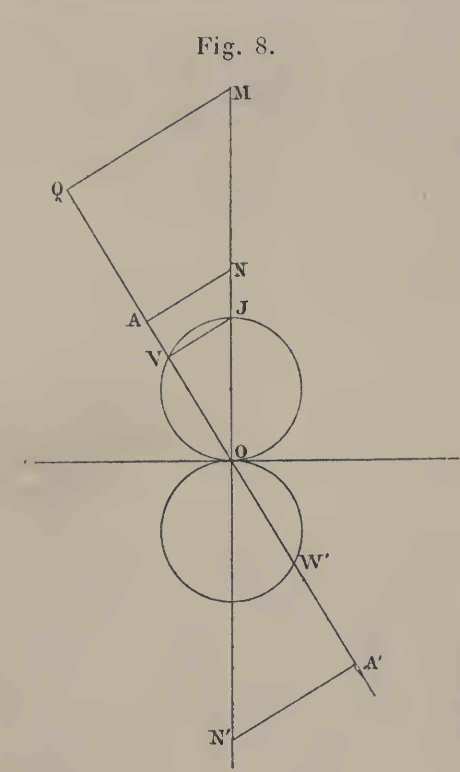
2. Nous avons déjà fait voir, dans le précédent paragraphe (III, 11), que, pour chaque droite d'un des systèmes qui passe par le point principal, la conique correspondante dans l'autre système se décompose en deux droites dont l'une est la ligne principale. Pour approfondir davantage cette question, nous reviendrons encore au cas de deux positions quelconques du système. Et comme les mêmes lois subsistent aussi bien pour le mouvement indirect que pour le mouvement direct, dans ce qui suit nous ne nous occuperons, en général, que du mouvement direct.

Si l_0 est une droite quelconque de σ_0 passant par O_{01}, et A_0 un de ses points, son rayon normal $a_0^{\vee}$ coïncidera avec l_0^m; il en résulte que les points d'intersection de $a_0^{\vee}$ et $a_1^{\vee}$ sont sur l_0^m. Mais les rayons normaux $a_1^{\vee}$ de tous les points de l

forment un faisceau perspectif à l_1^m. Celui-ci coupe donc l_0^m suivant une ponctuelle perspective à l_1^m et projective à l_0^m, et chacun de ses points A′ est l'intersection des rayons correspondants a_0^γ et a_1^γ.

Si nous passons à la limite, l_0^m coïncidera avec l; le centre de courbure A′ de chaque point A de l est donc sur l elle-même, et les points A et A′ forment deux ponctuelles projectives superposées. Ces ponctuelles ont le centre instantané O comme élément commun. Cela résulte aussi bien des lois de la correspondance quadratique que de ce fait que, O passant en ce moment, en général, par un point de rebroussement, le rayon de courbure de sa trajectoire doit être nul. Si, de plus, V et W′ (*fig.* 8) sont les points où l coupe les cercles des inflexions w et w', on a VO = OW′ et V et W′ sont les points de chaque ponctuelle qui correspondent au point à l'infini de l'autre. Les ponctuelles jouissent donc de la propriété que leurs points doubles coïncident avec le centre instantané de rotation.

Fig. 8.



On sait que, du moment que deux pareilles ponctuelles sont superposées, on peut construire autant de couples de points correspondants qu'on le veut, dès que l'on connaît le point double et un couple de points homologues. Maintenant nous allons voir que, conformément à ce qui a été dit plus haut, la correspondance quadratique est déterminée dès que l'on connaît deux couples de points (A, A′) et (B, B′). Désignons encore toute droite passant par O sous le nom de *rayon normal*, parce que c'est la normale aux trajectoires de tous ses points, et soient l_a, l_b les deux rayons sur lesquels se trouvent les couples de points (A, A′) et (B, B′). Nous pouvons sur l_a et l_b construire

les points V_a et V_b qui sont sur le cercle des inflexions. Alors ce cercle est déterminé puisqu'il est circonscrit au triangle $V_a V_b O$. Si maintenant l_c est un troisième rayon normal quelconque, nous connaissons sur l_c un couple de points correspondants formé de V_c et du point à l'infini. Nous savons donc construire le centre de courbure C′ de chaque point C de cette droite, c'est-à-dire que :

La correspondance quadratique entre les deux systèmes σ et σ' est complètement déterminée par deux couples de points correspondants.

Nous nous posons maintenant le problème : connaissant deux couples de points correspondants (AA′), (BB′), construire la tangente à la courbe polaire, les cercles des inflexions, et les centres de courbure dans chaque système. Les considérations suivantes nous fournissent le moyen d'effectuer ces constructions.

3. Soit (*fig.* 8) (A, A′) un couple de points correspondants de σ et σ', et l le rayon normal qui les joint. Nous désignerons par r et r' les distances des points A et A′ à O, et conviendrons que r et r' seront considérés comme positifs quand les points A et A′ seront du même côté de la tangente à la courbe polaire que le cercle des inflexions de leur système, c'est-à-dire quand A sera du même côté que w, A′ du même côté que w'. Sur chaque rayon normal les directions positives sont donc opposées l'une à l'autre. Comme A et A′ forment des ponctuelles projectives, on a ·

$$AV.A'W' = \overline{OV}^2 = \overline{OW'}^2.$$

Posons encore

$$OV = OW' = h,$$

on a

$$(r - h)(r' - h) = h^2$$

et

$$(1) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{h}.$$

Cette relation a lieu pour tout rayon normal. On peut en déduire une plus générale. Désignons par α l'angle que fait l avec la normale à la courbe polaire, et par h_0 le diamètre du cercle des inflexions; on a

$$(2)\qquad \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\cos\alpha=\frac{1}{h_0}.$$

L'expression qui figure dans le premier membre de l'égalité précédente est donc une constante.

Appelons ρ le rayon de courbure AA′, et posons $AV=s$.

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho-r}=\frac{1}{r-s},$$

$$(3)\qquad r^2=\rho s.$$

Si donc nous prenons le point Q sur la droite l de telle façon que $OA=AQ$, l'équation précédente nous donnera

$$\overline{QA}^2=\overline{AO}^2=AV.AA',$$

c'est-à-dire que Q, V, O, A′ forment une division harmonique, Q et O, V et A′ étant les couples de points conjugués.

Soit n la normale commune aux courbes polaires. Élevons en Q, A, V et A′ des perpendiculaires sur l; elles rencontrent la normale aux points M, N, J, N′ formant une division harmonique; J est le centre des inflexions, et N le milieu de OM. N et N′ constituent un couple de points correspondants, et N′ est le centre de courbure de la trajectoire de N.

Par suite :

Si N *et* N′ *sont un couple de points correspondants sur la normale commune aux courbes polaires, en projetant* N *et* N′ *sur un rayon normal quelconque, nous obtenons encore des points correspondants.*

Imaginons maintenant que l'on ait mené par O tous les rayons normaux, et projetons sur chacun d'eux le couple de points (N, N′), tous les points A ainsi obtenus sont sur un cercle qui a ON pour diamètre, et les points correspondants appartiennent au cercle dont le diamètre est ON′, c'est-à-dire que :

A tout cercle de σ qui touche la courbe polaire $\mathfrak{C}$ en O correspond dans σ' un cercle qui touche également la courbe polaire $\mathfrak{C}'$ de son système en O.

Nous avons ainsi acquis une image tangible de la façon dont a lieu la correspondance entre les systèmes σ et σ'.

4. Soient maintenant l_p et l_q deux rayons normaux quelconques de σ. Nous désignerons les couples de points correspondants sur l_p par

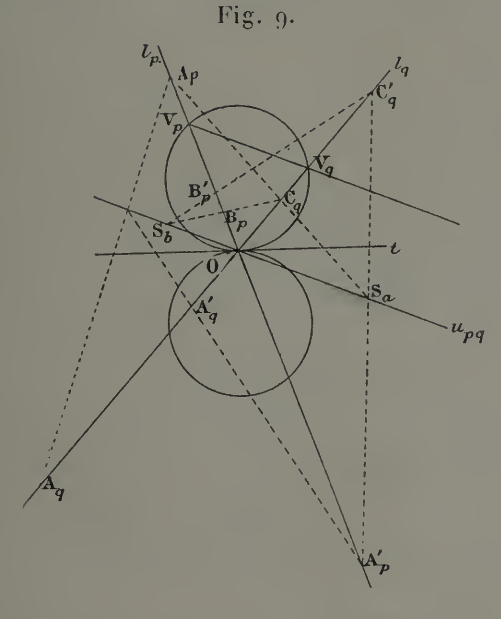
$$(A_p, A'_p), \quad (B_p, B'_p), \quad (C_p, C'_p), \quad \ldots$$

et sur l_q par

$$(A_q, A'_q), \quad (B_q, B'_q), \quad (C_q, C'_q), \quad \ldots.$$

Si nous projetons de A_p et A'_p les ponctuelles superposées sur l_q au moyen des faisceaux de rayons $A_p(A_q, B_q, C_q, \ldots)$, $A'_p(A'_q, B'_q, C'_q, \ldots)$, ces faisceaux auront en commun le rayon $A_p A'$ qui joint les points A_p, A'_p au point double O. Ils sont

Fig. 9.



donc en situation perspective, et les points d'intersection des rayons correspondants sont en ligne droite. Pour obtenir cette droite, déterminons (*fig.* 9) le point d'intersection S_a de deux rayons correspondants quelconques $A_p C_q$, $A'_p C'_q$, et joignons ce point à O. Si nous choisissons maintenant comme sommets

des faisceaux projetants deux autres points correspondants B_p et B'_p de l_p, les points d'intersection des rayons correspondants seront aussi sur une droite, et si S_b est le point d'intersection des rayons homologues $B_p C_q$ et $B'_p C'_q$, la droite en question sera la ligne de jonction de S_b avec O. Chaque couple de points du rayon l_p nous donnera donc une pareille droite. Mais toutes ces droites se superposent. Pour le prouver, nous n'avons qu'à faire voir que les points S_a, S_b sont tous sur une même droite passant par O. En effet, de C_q projetons la ponctuelle A_p, B_p, ... et de C'_q la ponctuelle A'_p, B'_p, ..., qui est projective à la première. Les deux faisceaux projetants ont en commun le rayon $C_q C'_q$; ils sont donc perspectifs, et les points d'intersection des rayons correspondants sont tous sur une droite passant par O. Mais ces points sont justement S_a et S_b. Nous pouvons donc finalement énoncer le théorème suivant :

Si l_p et l_q sont deux rayons normaux quelconques, (A_p, A'_p), (A_q, A'_q) deux couples de points correspondants quelconques pris sur ces rayons, les droites $A_p A_q$, $A'_p A'_q$ se coupent sur une droite fixe.

Nous désignerons cette droite, dont la position ne dépend que de l_p et de l_q, par u_{pq}. Mais nous pouvons imaginer que les ponctuelles projectives situées sur l_p et l_q déterminent la collinéation de deux systèmes plans, alors O sera le *centre* et u_{pq} *l'axe de collinéation correspondant à l_p et l_q* [1].

Pour déterminer sa position, nous nous servirons des points d'inflexion V_p et V_q des deux rayons normaux. Les points correspondants sont à l'infini. Donc $V_p V_q$ rencontre la droite de l'infini en un point de u_{pq}, c'est-à-dire que u_{pq} est parallèle à $V_p V_q$. Si nous menons encore la tangente t à la courbe polaire, on a $\wedge (t, l_q) = \wedge (l_p, u_{pq})$, parce que, d'après des théorèmes de Géométrie élémentaire, ces deux angles sont égaux à l'angle $(V_q V_p O)$. Donc :

Si l_p et l_q sont deux rayons normaux quelconques, l'angle que la tangente à la courbe polaire forme avec l'un des

---

[1] ARONHOLD, *Principes* ..., p. 139.

rayons normaux est égal à l'angle que fait l'autre avec l'axe de collinéation.

Supposons maintenant l_p fixe et faisons tourner l_q autour de O; l'axe de collinéation u_{pq} tourne également autour de O; l_q et u_{pq} engendrent deux faisceaux de rayons, et l'on a toujours

$$\wedge(t, l_p) = \wedge(l_q, u_{pq}),$$

c'est-à-dire que les rayons l_p et u_{pq} forment deux à deux un angle constant; en les adjoignant deux à deux comme correspondants, on voit que :

Si l_p est un rayon normal quelconque fixe, les faisceaux formés par tous les rayons normaux et les axes de collinéation correspondants sont deux faisceaux égaux et concentriques dans lesquels les rayons correspondants se coupent deux à deux sous le même angle que l_p et la tangente à la courbe polaire.

A chaque rayon normal appartient donc un faisceau bien déterminé d'axes de collinéation.

En ce qui concerne les angles formés par l_p, l_q, u_{pq} et t, on peut encore faire la remarque suivante : les rayons normaux l_p et l_q partagent le plan en deux régions; il résulte de la manière dont ont été établis les théorèmes précédents que u_{pq} et t sont toujours dans la même région. Si donc l'une de ces droites est donnée, la position de l'autre est parfaitement déterminée.

5. En se servant des résultats précédents, on effectuera facilement les constructions dont il a été question.

Supposons que la relation quadratique soit déterminée par deux couples de points correspondants (A, A') et (B, B'), et appelons encore l_a et l_b les rayons normaux correspondants, nous obtiendrons la tangente à la courbe polaire de la façon suivante :

Menons AB et A'B', et joignons le point d'intersection S de ces deux droites à O. OS sera l'axe de collinéation u_{ab}. Maintenant, construisons une droite t, de telle façon que

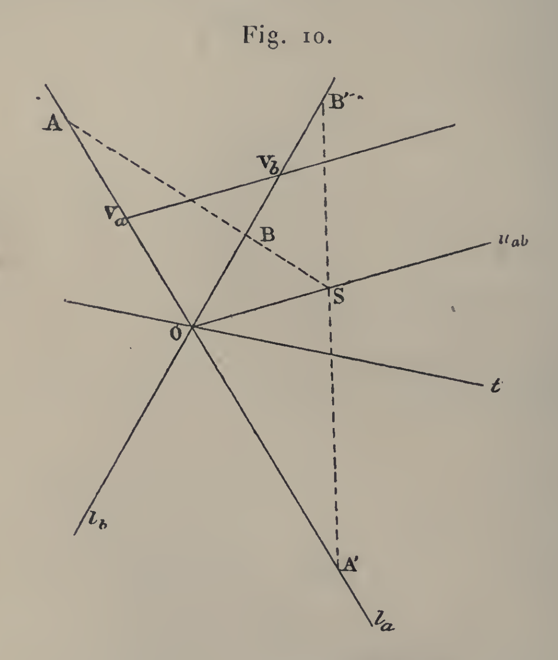
$$\wedge(t, l_b) = \wedge(l_a, u_{ab})$$

et que t et u_{ab} soient dans la même région du plan, t sera la tangente en O à la courbe polaire.

Cette construction, donnée d'abord par Bobillier, est connue sous le nom de *construction de Bobillier* (¹).

Pour construire les points d'inflexion V_a et V_b situés sur l_a et l_b, nous procéderons de la façon suivante : Par A' menons une parallèle à l_b, et joignons à A le point où elle coupe l'axe de collinéation. La droite ainsi obtenue coupe l_b au point V_b.

Fig. 10.



Si par V_b nous menons une parallèle à u_{ab}, elle coupera l_a en V_a. De cette manière le cercle des inflexions ϖ de σ est lui-même déterminé.

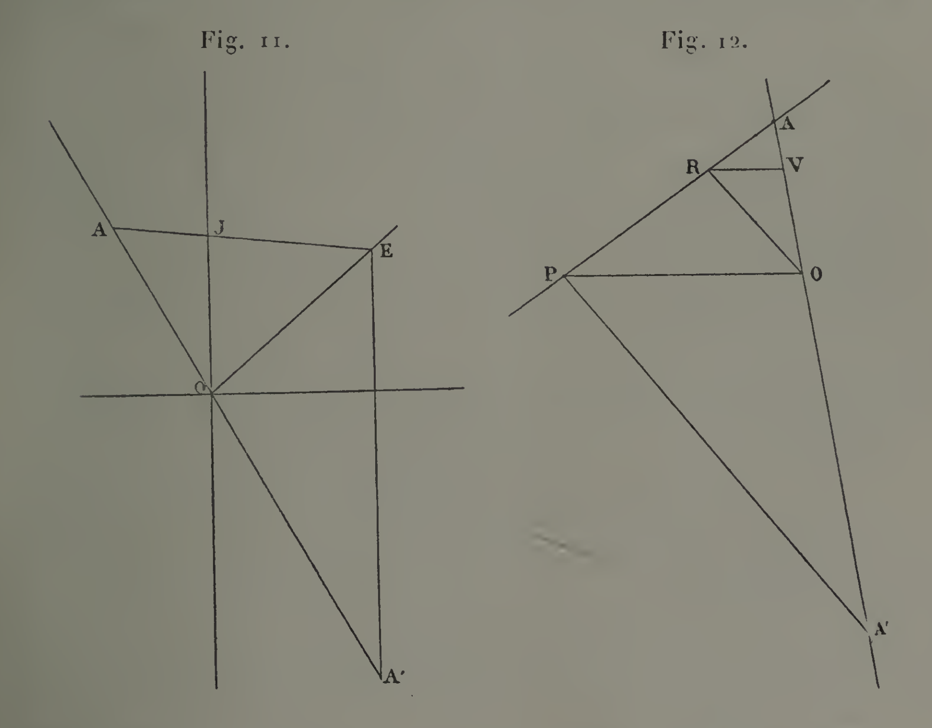
Si donc deux couples de points correspondants (AA') et (BB') sont donnés, on construira linéairement les points d'inflexion situés sur les rayons normaux correspondants.

On demande maintenant de construire le centre de courbure C' correspondant à un point quelconque C de σ'. Soit l_c le rayon normal sur lequel se trouve C, les droites AC et A'C' se couperont sur l'axe de collinéation u_{ac}. Mais cet axe est déterminé, comme il résulte du dernier théorème, par le

(¹) Bobillier, *Cours de Géométrie*, 15ᵉ édition, p. 232.

rayon l_c. Donc, nous construirons u_{ac} de telle façon que u_{ac} fasse avec l_c le même angle que l_b, nous mènerons AC, et joindrons A′ au point où AC coupe u_{ac}. Cette droite rencontre l_c en C′.

Si la tangente à la courbe polaire et un couple de points correspondants (A, A′) sont donnés, le diamètre du cercle des inflexions pourra immédiatement être déterminé. Si nous traçons en effet la normale à la courbe polaire, le faisceau d'axes de collinéation qui lui correspond jouit de la propriété que chaque rayon normal est perpendiculaire sur son axe de collinéation. Donc (*fig.* 11), menons par A′ une parallèle à la



normale à la courbe polaire, élevons en O une perpendiculaire sur le rayon normal l_a, et appelons E le point d'intersection des deux droites. EA coupera la normale à la courbe polaire au centre des inflexions J.

Inversement on peut, étant donné le centre des inflexions, trouver le centre de courbure correspondant à chaque point A du système σ.

Enfin, mentionnons encore la construction suivante, qui permet de construire linéairement le point d'inflexion sur

chaque rayon normal, quand on connaît un couple de points correspondants sur ce rayon (*fig.* 12).

Menons par A une droite quelconque g, et joignons un de ses points P à O et à A'. Menons alors par O une parallèle à A'P, et par son point d'intersection R avec g une parallèle à PO. Celle-ci rencontrera le rayon normal l au point d'inflexion V, sur le cercle des inflexions; car

$$PA:RA = A'A:OA$$

et

$$PA:RA = OA:VA.$$

Donc,

$$AA'.VA = \overline{OA}^2$$

et ceci est la relation obtenue au n° 3.

Si A et V sont donnés, on pourra d'une manière analogue construire le centre de courbure A' ([1]).

Cette construction renferme la précédente comme cas particulier.

Si le point R de la *fig.* 12 vient au pôle des inflexions J, la *fig.* 12 se transforme en la *fig.* 11.

6. Quelques exemples pour appliquer les résultats acquis. Nous nous servirons des théorèmes suivants : Si un point de σ se meut sur une droite, il est sur le cercle des inflexions ϖ de σ.

Fig. 13.

Si une droite de σ passe constamment par le même point, celui-ci décrira dans le mouvement inverse une droite, et se trouve sur le cercle des inflexions ϖ' de σ'.

(a) Le système plan σ se déplace de telle façon que deux points A et B se meuvent sur deux droites fixes a' et b' de σ'.

Chaque point du système décrit alors une ellipse.

On construira immédiatement le centre de rotation, et le

([1]) Cette construction est due à Grubler (*Schlömilch's Zeitschrift*, t. XXIX, p. 310).

cercle des inflexions (*fig.* 13). Les perpendiculaires élevées en A et B sur a' et b' se coupent au centre instantané de rotation O. Le cercle des inflexions est déterminé, car il passe par O, A et B. Si S' est le point d'intersection de a' et de b', ABOS' est un quadrilatère inscriptible, et, comme l'angle formé par a' et b' est constant, on en conclut que le cercle des inflexions est dans ce cas un cercle invariable du système σ.

Tous les points du cercle des inflexions se déplacent donc sur des lignes droites, comme A et B.

Comme les tangentes d'inflexion passent toutes par le centre des inflexions (III, 9) et que a' et b' sont les tangentes aux points A et B, il en résulte que S' est le centre des inflexions, et de là il suit que chaque point C du cercle des inflexions se déplace sur une droite C' passant par S'. Nous pouvons donc définir le mouvement en remplaçant les points A et B par deux autres points du cercle des inflexions, par exemple par les extrémités d'un diamètre. Si F et G sont ces points, f' et g' seront perpendiculaires l'une sur l'autre. Donc le mouvement peut être déterminé de telle façon que deux points F et G de σ se déplacent sur deux droites f' et g' perpendiculaires entre elles.

Si M est le point milieu de FG, on a $MF = MG = MS'$. Le point M est donc toujours à égale distance de S', et pour lui l'ellipse devient un cercle qui a S' pour centre.

Comme l'angle (AOB) est toujours le supplément de l'angle formé par a' et b', le lieu des points O du système mobile qui deviennent des centres instantanés de rotation au cours du mouvement est le segment décrit sur AB, capable de l'angle (AOB). La courbe polaire de σ est donc identique avec le cercle des inflexions.

La courbe polaire de σ' est un cercle décrit autour de S' comme centre, car OS' est une droite de longueur constante.

Le mouvement peut donc être défini de telle façon qu'un cercle de rayon a roule à l'intérieur d'un cercle de rayon $2a$.

(b) Le mouvement est défini de telle façon qu'une droite g de σ passe toujours par un point fixe P', tandis qu'un point A de g parcourt une droite a' de σ'. Chaque point de la droite décrit alors une conchoïde.

La perpendiculaire élevée en A sur a' et celle élevée en P'

sur g se coupent au centre instantané de rotation. Nous connaissons déjà deux points du cercle des inflexions, O et A. De plus, P′ est sur le cercle des inflexions de σ'. Si nous prenons le point B de OP′, de telle façon que $P'O = OB$, B est un troisième point du cercle des inflexions de σ.

On peut facilement démontrer que le lieu des pôles forme dans le système fixe σ' une parabole dont le sommet est le point P′, dont l'axe est perpendiculaire à la droite a', et dont la directrice passe par le milieu de la distance comprise entre P′ et a'; la courbe polaire du système mobile est du quatrième ordre.

(c) Définissons le mouvement de C en assujettissant un point A à se mouvoir sur un cercle K′, et un point B sur un diamètre b' du cercle (engrenage de Lahire).

Le rayon passant par A et la perpendiculaire élevée en B sur b' se coupent au centre instantané de rotation O. Le cercle des inflexions passe par O et B. Le centre de courbure A′ de A est le centre du cercle K′. Donc on sait, d'après ce qui a été dit, construire le point du cercle des inflexions situé sur AA′.

Les courbes polaires sont de l'ordre quatre et six; la dernière appartient au système mobile, la première au système fixe.

(d) Imaginons que le mouvement d'un système plan s'effectue de telle façon qu'un point A de ce système se déplace sur un cercle fixe K′, tandis qu'une droite g menée par A passe toujours par un point fixe P′ de K′. Alors chaque point de la droite décrit un limaçon de Pascal.

Le rayon passant par A et la perpendiculaire élevée en P′ sur g se coupent au centre de rotation O. Le cercle des inflexions passe par O et le point V de OP′ pour lequel $OV = OP'$. Si A′ est le centre du cercle K′, on pourra au moyen de A et de A′, déterminer un troisième point du cercle des inflexions.

(e) On peut encore considérer l'exemple précédent à un autre point de vue. Nous avons vu que, dans le mouvement étudié en (a), le point M décrit un cercle de centre S′. Ce mouvement peut donc encore se définir en assujettissant un point M de σ à décrire un cercle, pendant qu'un second point A parcourt une droite a'. Dans le mouvement inverse, la droite a' passera donc

toujours par un point fixe A de σ, et, comme M parcourt un cercle de centre S′, ce point sera sur un cercle dont le centre est en M, et qui passe en A. L'inversion du mouvement (a) est donc identique avec le mouvement (d), et toutes les constructions effectuées dans le premier cas sont valables pour le dernier. En particulier, il suit de là que non seulement a', mais toute droite du faisceau de rayons dont le centre est S′, passe par un point fixe, et que le cercle des inflexions du système conserve toujours la même grandeur. Donc le point d'ondulation (III, 10) coïncidera à chaque instant avec le centre des inflexions.

Nous voyons ainsi de quelle utilité peut être l'inversion du mouvement même dans ces cas spéciaux.

(f) Les exemples précédents sont en grande partie des cas particuliers d'un mode plus général de mouvement qui est défini par la condition que deux points A et B de σ se meuvent sur deux courbes fixes a' et b' de σ'. Les normales aux courbes a' et b' en A et B déterminent alors le centre instantané. Si l'on sait construire les centres de courbure des courbes a' et b' pour les points A et B, chacun des couples (A, A′) et (B, B′) déterminera un point du cercle des inflexions, et, par suite, ce cercle lui même sera déterminé. Pour chaque point P de la figure mobile σ on pourra donc construire le centre de courbure de la trajectoire.

Le mode de déplacement dont il vient d'être parlé acquiert un intérêt particulier lorsque les courbes a' et b' sont des cercles.

Alors trois barres de longueurs invariables, mais faisant entre elles des angles variables, à savoir AA′, AB, BB′, se déplacent de toutes les façons possibles. La courbe décrite par un point quelconque du système mobile s'appelle *courbe des trois barres* et a été souvent étudiée [1]. Il est très facile, d'après ce qui vient d'être dit, de déterminer son rayon de courbure. La courbe est du sixième ordre; les points cycliques sont des points triples; de plus, elle a trois points tri-

---

[1] *Voyez* par exemple S. ROBERTS, *On the three-bar motion in plane space* (*Proceed. of the Lond. Math. Soc.*, t. VII, p. 14), et *Three-bar motion* (*Ibid.*, p. 136).

ples à distance finie. Ceux-ci sont sur le segment décrit sur $A'B'$, et capable de l'angle (APB), P étant le point dont on étudie le mouvement.

En particulier, lorsque les rayons des cercles sont égaux, et si $AB = A'B'$, le mouvement peut s'effectuer, d'une part, de telle sorte que AB reste toujours parallèle à $A'B'$, les quatre points A, B, A', B' formant un parallélogramme. Le centre instantané est alors toujours à l'infini, et tous les points décrivent des éléments parallèles.

Mais on peut aussi faire glisser la droite AB de telle façon sur la circonférence de cercle, qu'elle ne soit pas parallèle à $A'B'$. Les quatre points A, B, A', B' définissent alors un antiparallélogramme.

Le centre de rotation O est encore à l'intersection de AA' et BB'.

De plus, comme $AA' = BB'$, le triangle OAB est égal au triangle $OB'A'$. Par suite, $OB - OA = \rho = OA' - OB'$, ρ étant le rayon du cercle. Ces équations montrent que la courbe polaire est, pour le système fixe comme pour le système mobile, une hyperbole, ayant pour foyers A et B, ou A' et B'; si $AA' > AB$, les hyperboles sont remplacées par des ellipses.

L'identité des deux courbes polaires est évidente si l'on envisage le mouvement inverse. Lorsque deux points A et B se meuvent sur des circonférences dont les centres sont en A' et B', ce mouvement peut toujours être défini par le déplacement de A' et B' sur deux circonférences dont les centres sont en A et B. Les deux mouvements sont donc complètement identiques; ils sont engendrés par le roulement l'une sur l'autre de courbes de même nature. Dans le cas de l'antiparallélogramme, ces courbes sont égales et se touchent en des points correspondants, c'est-à-dire qu'elles sont à chaque instant symétriques par rapport à leur tangente commune.

V. — Les points à courbure stationnaire.

1. Jusqu'ici nous ne nous sommes guère occupé que des propriétés des trajectoires que l'on peut déduire de la considération de deux éléments infiniment voisins. Dans ce para-

graphe nous ferons un pas en avant et nos recherches s'étendront à trois éléments consécutifs.

Nous supposerons d'abord données quatre positions σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 du système plan σ. Désignons par a_0^γ, a_1^γ, a_2^γ les trois rayons normaux consécutifs d'un point A. En général, ils forment un triangle, mais nous pouvons nous demander s'il existe des points A de σ dont les rayons normaux a_0^γ, a_1^γ, a_2^γ se coupent en un seul et même point, et tels par conséquent que les quatre positions A_0, A_1, A_2, A_3 soient sur un cercle.

Il existe en effet de pareils points. Car, si g est une droite quelconque, les points d'intersection des rayons normaux a_0^γ et a_1^γ qui lui correspondent forment une conique qui passe par les centres de rotation O'_{12}, O'_{20}, O'_{01} (III, 1).

De même, les points d'intersection des rayons a_1^γ et a_2^γ forment une section conique qui passe par O'_{23}, O'_{31}, O'_{12}. Ces coniques contiennent toutes les deux le point O'_{12}. Donc elles se couperont encore en général en trois autres points, et chacun d'eux est caractérisé par le fait d'être le point de rencontre de trois rayons normaux consécutifs.

Il existe donc sur g trois points de l'espèce considérée, et l'ensemble de ces points constitue une courbe du troisième ordre. On la désignera par k^3_{0123} ou k^3_{03}.

On peut encore définir de la manière suivante les points de cette courbe. Les trois positions $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ déterminent une relation quadratique entre les points de σ et ceux de σ'; de même les trois positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en déterminent une autre. A chaque point A correspondent, en général, deux points différents. Mais les points de la courbe k^3_{03} jouissent de la propriété que le même point leur correspond dans les deux relations quadratiques, et les points A' sont les éléments unis des deux systèmes superposés σ', dont chacun est en relation quadratique avec σ.

2. Il existe également une pareille courbe dans le système plan σ' pour le mouvement inverse, et les deux courbes sont en relation réciproque. Si A est un point de k^3_{03} et A' le centre du cercle qui passe par A_0, A_1, A_2, A_3, A' est un point $k^{3\prime}_{03}$. En effet, que nous regardions σ ou σ' comme mobile, les deux points A et A' seront, pour les quatre positions considérées,

à la même distance l'un de l'autre. C'est dire que A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 sont sur un cercle dont le centre est en A. Ainsi, chaque point A′ de $k^{3\prime}_{03}$ est le centre du cercle correspondant au point A de k^3_{03}, et inversement, chaque point A de k^3_{03} est le centre du cercle qui appartient à A′.

La courbe $k^{3\prime}_{03}$ est donc le lieu des centres des cercles pour les points de k^3_{03}, et k^3_{03} est le lieu des centres des cercles pour les points de $k^{3\prime}_{03}$ dans le mouvement inverse.

Chaque couple de points A et A′ est formé de deux points correspondants des systèmes σ et σ'; donc k^3_{03} et $k^{3\prime}_{03}$ sont des courbes correspondantes. k^3_{03} passe par O_{12}, O_{20}, O_{01}, et $k^{3\prime}_{03}$ par O'_{12}, O'_{20}, O'_{01}, et, en effet, pour chacun de ces points, les quatre positions considérées sont sur un même cercle, car deux d'entre elles coïncident. Mais on voit que les points de $k^{3\prime}_{03}$ se comportent de la même manière vis-à-vis des quatre positions $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, car, en chacun de ces points A′ convergent, outre a^v_0, a^v_1, a^v_2, trois autres rayons normaux, qui sont les perpendiculaires élevées au milieu des cordes A_0A_2, A_0A_3, A_1A_3.

Donc $k^{3\prime}_{03}$ passe par les six centres de rotation

$$O'_{01},\quad O'_{02},\quad O'_{03},\quad O'_{12},\quad O'_{13},\quad O'_{23}.$$

De même, k^3_{03} passe par

$$O_{01},\quad O_{02},\quad O_{03},\quad O_{12},\quad O_{13},\quad O_{23}.$$

3. Les deux courbes passent aussi par les points cycliques.

Pour le démontrer, nous procéderons de la façon suivante :

Nous avons vu que, si g est une droite quelconque de σ, dans chacune des relations quadratiques dont il a été question plus haut, il correspondra à cette droite une section conique, et que les points d'intersection différents de O'_{12} sont des points de $k^{3\prime}_{03}$. Si, en particulier, nous considérons la droite de l'infini de σ, il lui correspondra, pour les positions $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, le cercle des inflexions w'_{012} et, pour les positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, le cercle des inflexions w'_{123}. Les deux cercles se coupent en dehors de O'_{12} en un point situé à distance finie, et en deux points imaginaires situés à l'infini, points qui sont

communs à tous les cercles du plan. Ces points sont donc des points de $k_{03}^{3\prime}$, et la même chose a lieu pour k_{03}^{3}.

Finalement on en conclut que :

Si $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont quatre positions quelconques du système plan σ, il existe une infinité de points A pour lesquels les quatre positions A_0, A_1, A_2, A_3 appartiennent à un même cercle. Ils forment une courbe du troisième ordre k_{03}^{3} qui passe par les six centres de rotation $O_{01}, O_{02}, O_{03}, O_{12}, O_{13}, O_{23}$ et les points circulaires de l'infini. Les centres de ces cercles forment une courbe du troisième ordre $k_{03}^{3\prime}$ située dans σ', qui passe par les six centres du mouvement inverse et les points circulaires de l'infini. Dans l'inversion du mouvement les deux courbes échangent leur signification (¹).

Soit W' le point d'intersection réel des cercles des inflexions w'_{012} et w'_{123}, différent de O'_{12}. On vient de démontrer que W' est sur $k_{03}^{3\prime}$. Le point W_∞ qui lui correspond sur la courbe k_{03}^{3} est à l'infini, et c'est le seul point à l'infini de k_{03}^{3}. De même les cercles des inflexions w_{012} et w_{123} se coupent en un point V de k_{03}^{3}, auquel correspond sur $k_{03}^{3\prime}$ un point à l'infini V'_∞. Les trois rayons normaux de V se coupent donc en V'_∞, c'est-à-dire que V_0, V_1, V_2, V_3 sont en ligne droite, et la même chose a lieu pour les points W'_0, W'_1, W'_2, W'_3. Nous retrouvons donc pour les points V et W' les propriétés dont nous avions déjà démontré l'existence en nous plaçant à un autre point de vue (III, 7). Pour les points cycliques, communs aux courbes k_{03}^{3} et $k_{03}^{3\prime}$, nous sommes obligé de conclure qu'ils se correspondent à eux-mêmes et que, par conséquent, chacun d'eux coïncide avec le centre de son cercle de courbure. Ces points devront donc être considérés comme fixes dans n'importe quel déplacement d'un système plan dans son plan.

Si donc σ_i et σ_k sont deux positions complètement arbitraires du système plan σ, les points cycliques et le centre

---

(¹) Burmester a démontré l'existence des courbes k_{03} et k'_{03} (*Civilingenieur*, t. XXIII, p. 241). Pour les propriétés spéciales de ces courbes qui contiennent les points cycliques, *voir* par exemple SCHRÖTER, *Math. Annalen*, t. V, p. 50 et t. VI, p. 85, ou DURÈGE, *Math. Annalen*, t. V, p. 83.

de rotation O_{ik} sont les trois points unis des systèmes plans en collinéation. Nous devons considérer comme droites unies, en dehors de la droite de l'infini, les droites qui joignent le centre de rotation aux points imaginaires de l'infini.

4. Après avoir montré l'existence de la courbe k^3_{03}, il est naturel de lui adjoindre la courbe k^3_{14} qui répond aux quatre positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Les deux courbes ont en commun les points cycliques et, en outre, les centres de rotation O_{23}, O_{31}, O_{12}; par conséquent, elles se couperont encore, en général, en quatre autres points. Chacun de ces points jouit de la propriété que, pour lui, les cinq positions A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à un même cercle. Cela n'a pas lieu, en général, pour les points O_{23}, O_{31}, O_{12}. Nous arrivons donc au résultat suivant :

Si $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ sont cinq positions quelconques du système plan σ, il existe, en général, quatre points A *pour lesquels* A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *sont sur un même cercle. Les centres de ces cercles sont les points analogues de σ' pour le mouvement indirect et inversement* (1).

5. Rapprochons indéfiniment les positions $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, choisies arbitrairement, et nous obtiendrons encore des théorèmes que l'on peut énoncer à chaque instant du mouvement d'un système.

Toutefois, il est nécessaire de soumettre à une étude spéciale la question de savoir quels sont les caractères spéciaux que la coïncidence des points O_{01}, O_{12} avec le centre instantané O confère à la courbe k_3.

Comme la courbe k_{03} contient les points O_{01}, O_{12}, la courbe k^3, qui prend naissance quand le mouvement est continu, sera tangente à la courbe polaire au point O. Mais il s'agit de savoir de quelle nature est ce contact. Pour cela, revenons encore à des positions distinctes du système, et considérons une droite l_0 de σ_0 qui soit telle que l_1 passe par O_{12}. Alors la droite l_2 passera aussi par le point O_{12}, ainsi que l'''_1. Considérons un point quelconque A de l, et déterminons les rayons normaux $a^\vee_0, a^\vee_1, a^\vee_2$.

(1) *Voir* BURMESTER, *Civilingenieur*, t. XXIII, p. 319.

Les premiers se coupent en A', qui est le centre de courbure de A, pour les positions $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$; de même, a_1^γ et a_2^γ se coupent en A'' qui est le centre de courbure de A pour les positions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Les deux points sont sur a_1^γ. Mais, étant donnée la position spéciale de l, la droite a_1^γ est identique avec l_1''', et cela a lieu pour tout point de l.

Si donc le point A se meut sur la droite l, les points A' et A'' décriront sur l_1''' deux séries projectives, et les points unis de ces séries sont des points de σ' qui appartiennent à la courbe $k^{3\prime}$.

Ces deux points seront, dans le cas général, différents de O_{12}, car les points O_{01} et O_{23} qui déterminent la correspondance des systèmes, et, par suite, la relation de projectivité entre les deux séries, peuvent toujours être choisis arbitrairement.

Ce qui vient d'être dit ne subit pas de changement, si l'on passe à des positions consécutives. Dans ce cas, les séries ponctuelles, formées par A, A', A'', sont toutes sur une même droite l. De plus, dans la relation projective existant entre A et A', le point O se correspond à lui-même, et de même pour la projectivité existant entre A et A''; donc aussi pour les séries A' et A''.

Le mouvement étant continu, un point double des séries viendra en O, c'est-à-dire qu'un nouveau point de la courbe k'_{03} vient en O; ce point eût été différent du centre de rotation pour un déplacement fini. Le point O' est donc un point double de la courbe k^3. Mais cette courbe passe par les points circulaires de l'infini, et l'on sait que, pour ces courbes, les tangentes au point double sont perpendiculaires l'une sur l'autre (¹). L'une de ces tangentes étant la tangente à la courbe polaire, l'autre est la normale. Nous arrivons au résultat suivant :

Si un système plan σ se meut dans son plan, il existe à chaque instant une courbe du troisième ordre k^3 dont les points décrivent des trajectoires ayant à ce moment un cercle de courbure stationnaire. Les centres de ces cercles forment

(¹) Voir, par exemple, SCHRÖTER, *Ueber Curven dritter Ordnung* (*Math. Annal.*, t. VI, p. 85).

une courbe $k^{3'}$ *située dans le plan fixe* σ', *et cette courbe est aussi du troisième ordre, et passe par les points cycliques du plan. Chacune de ces courbes possède au centre instantané de rotation un point double; les tangentes au point double sont la tangente et la normale aux courbes polaires. Dans le mouvement inverse, les deux courbes échangent leur signification.*

Si un système plan σ *se déplace dans son plan, il y a, à chaque instant, et en général, quatre points tels que les cercles osculateurs de leurs trajectoires aient un contact du quatrième ordre avec les courbes. Les centres de ces cercles sont les points analogues du plan fixe* σ' *pour le mouvement indirect et inversement.*

6. Pour appliquer les théorèmes précédents à un exemple, nous considérerons le cas déjà étudié au paragraphe précédent au n° 6 (*a*).

Nous avions démontré que le cercle des inflexions est un cercle de grandeur constante. Chacun de ses points décrit une droite et, par conséquent, appartient à chaque instant à la courbe k^3. Il faut donc que celle-ci se décompose et nous donne le cercle et une droite u. Mais le centre du cercle des inflexions se déplace sur un cercle; il fait donc partie de k^3 et, comme il n'est pas sur le cercle des inflexions, u passe par M. Il s'ensuit qu'à chaque instant les points qui passent par un sommet de leur ellipse trajectoire sont sur une droite passant par M. La droite u est donc toujours un diamètre du cercle des inflexions. Si nous considérons celui qui est perpendiculaire sur la tangente à la courbe polaire, les extrémités de ce diamètre devront être considérées comme des points qui passent par un sommet de leurs ellipses. Donc la droite u est la normale commune aux courbes polaires.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que ceci est une conséquence du théorème qui vient d'être démontré, et d'après lequel la courbe k^3 possède en O un point double pour lequel la tangente et la normale des courbes polaires sont les tangentes à k^3 [1].

---

[1] RODENBERG [*Ueber die während der Bewegung projectiv-veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Curven und Flächen* (*Göttinger*

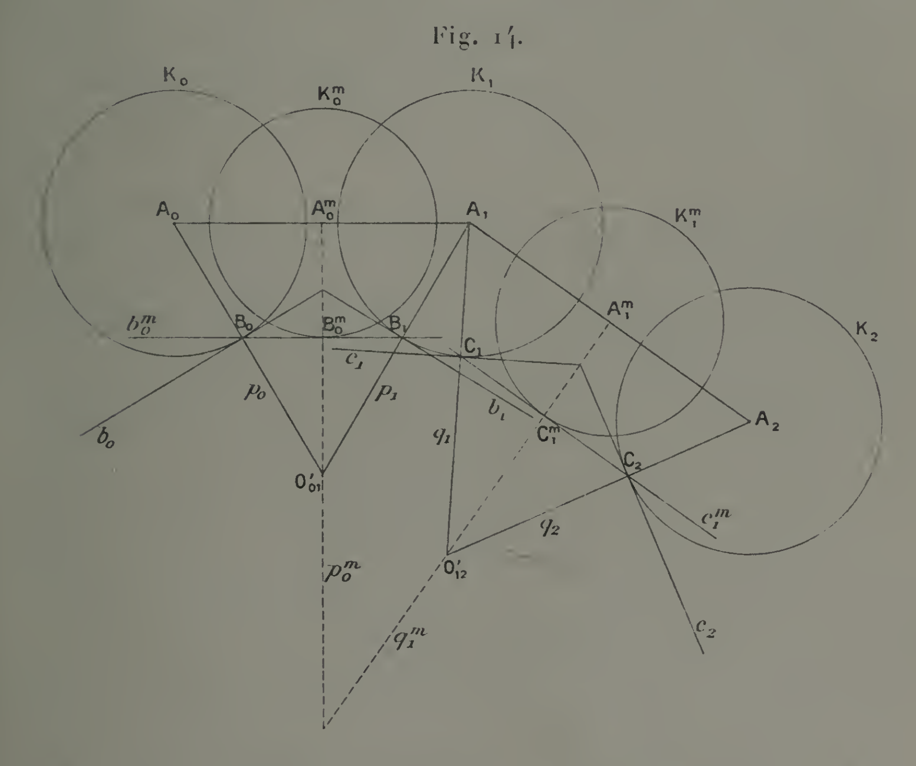
VI. — La courbure des enveloppes des courbes du système.

1. On peut ramener l'étude de la courbure des enveloppes à celles des trajectoires de points.

Pour le démontrer, considérons les trois positions K_0, K_1, K_2 d'un cercle quelconque. Soient A_0, A_1, A_2 les positions de son centre (*fig.* 14).

Supposons encore que l'on ait tracé les cercles K_0^m, K_1^m; leurs centres sont A_0^m, A_1^m. Joignons le centre de rotation O'_{01}

Fig. 14.



à A_0, A_0^m et A_1; nous obtiendrons ainsi les droites p_0, p_0^m, p_1. Elles coupent les cercles correspondants aux points B_0, B_0^m et B_1, et, pour fixer les idées, nous admettons que B_0^m est situé

Nachrichten, 1888, p. 176) s'occupe de rechercher les points du système pour lesquels plus de n positions consécutives sont sur une courbe de $n^{\text{ième}}$ ordre. lorsque cette courbe est déterminée par n points; il traite aussi de quelques problèmes qui se rattachent à cette question.

entre O'_{01} et A'''_0; par conséquent B_0 et B_1 seront aussi entre O'_{01} et A_0 ou A_1. Enfin les tangentes aux trois cercles en B_0, B'''_0 et B_1 sont trois droites correspondantes b_0, b'''_0, b_1 de nos systèmes plans σ_0, σ'''_0, σ_1.

Nous effectuerons les mêmes constructions sur les cercles K_1, K'''_1, K_2. Désignons par q_1, q'''_1 et q_2 les lignes de jonction de leurs centres avec O'_{12}. Les points d'intersection des cercles avec q_1, q'''_0, q_2, qui sont situés entre les centres et le centre de rotation, sont C_1, C'''_1, C_2, et les tangentes en ces points sont c_1, c'''_1, c_2. Concevons maintenant une courbe k de σ qui touche le cercle K en B et C, mais qui, à part cela, peut être tout à fait arbitraire. La rotation autour de O'_{01} devenant infiniment petite, b'''_0 (1, 7) tendra vers la tangente commune à la courbe k et à son enveloppe. B'''_0 deviendra le point de contact instantané, et p'''_0 la normale à l'enveloppe en ce point.

La même chose aura lieu pour c'''_1, C''' et q'''_1, lorsque la rotation autour de O'_{12} deviendra infiniment petite. Et ces conclusions s'étendent à toutes les courbes k de σ qui satisfont à la condition de toucher le cercle K en B et en C, quelle que soit la position relative des points O'_{01} et O'_{12}.

Faisons encore l'hypothèse d'un déplacement continu de σ; O'_{01} et O'_{12} sont deux points infiniment voisins de la courbe polaire de σ'. Alors B et C seront aussi infiniment voisins, et, comme k doit toujours toucher le cercle en B et C, K deviendra le cercle de courbure de la courbe k, et il suit de là que, pour toute courbe du système qui a pour cercle osculateur le cercle K, le point limite d'intersection de p'''_0 et q'''_1 est le centre de courbure de l'enveloppe. Mais p'''_0 est le rayon normal a^{v}_1, q'''_1 le rayon a^{v}_1 : donc le point d'intersection de p'''_0 et q'''_1 sera à la limite le centre de courbure de la trajectoire de A. Nous sommes donc arrivés au théorème général suivant :

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe coïncide à chaque instant avec le centre de courbure de la trajectoire que décrit le centre de courbure de la courbe.

2. Si nous nommons k' l'enveloppe de la courbe k, dans le mouvement inverse, k sera l'enveloppe de k', car les courbes k et k' se touchent à chaque moment, et ceci est

une propriété purement géométrique, indépendante de notre situation dans σ ou σ'. La signification de la correspondance quadratique entre les systèmes σ et σ' est donc beaucoup plus générale qu'il n'a été démontré dans le paragraphe précédent. Car, si k et k' sont deux courbes quelconques dont l'une soit l'enveloppe de l'autre, leurs centres de courbure pour le point de contact instantané seront toujours deux points correspondants A et A' de la correspondance quadratique qui caractérise l'instant considéré du mouvement.

Les courbes polaires $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont aussi des courbes du genre de celles que nous considérons, et, en effet, $\mathfrak{C}'$ est l'enveloppe de $\mathfrak{C}$ pour le mouvement direct, et $\mathfrak{C}$ celle de $\mathfrak{C}'$ pour le mouvement inverse. Les centres de courbure des deux courbes sont donc à chaque instant des points homologues des systèmes σ et σ' se correspondant quadratiquement.

Les relations et les constructions qui ont été données au § IV, relativement à un couple de points correspondants A et A' s'appliquent donc également aux centres de courbure des courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$. Si r et r' représentent maintenant les distances du centre instantané de rotation aux centres de courbure d'une courbe et de son enveloppe, l'équation du § IV, 3 s'appliquera aussi à ces points, et l'on aura

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos\alpha = \frac{1}{h_0},$$

où α désigne l'angle que fait la ligne de jonction de A et A' avec la normale aux courbes polaires; les signes de r et de r' sont définis de la même façon qu'au § IV. Si ρ et ρ' désignent les rayons de courbure des courbes polaires pour le centre instantané de rotation, on a

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos\alpha = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{h_0}.$$

Cette relation est appelée, du nom de celui qui l'a donnée pour la première fois, *équation de Savary* [1].

---

[1] Cette équation fut établie par Euler : *Supplementum de figura*

3. Faisons maintenant l'hypothèse particulière que la courbe k est une droite. Son centre de courbure est à l'infini; par conséquent le centre de courbure de son enveloppe est sur le cercle des inflexions w' de σ', et le fait analogue a lieu pour le mouvement inverse. Donc :

Les centres de courbure des enveloppes de toutes les droites d'un système plan sont à chaque instant sur le cercle des inflexions de l'autre système.

Inversement, si k est une courbe du système σ dont le centre de courbure est sur le cercle des inflexions de σ, le centre de courbure de son enveloppe est rejeté à l'infini, l'enveloppe possède un point d'inflexion. Il suit de là que :

Si le centre de courbure d'une courbe appartenant à un système plan est sur le cercle des inflexions, l'enveloppe de cette courbe a un point d'inflexion au point de contact instantané.

4. Pour appliquer les théorèmes précédents à quelques exemples, nous traiterons d'abord quelques cas dans lesquels les courbes polaires sont immédiatement données.

(*a*) *Mouvement cycloïdal.* — Lorsqu'un cercle k roule sur une droite g, chacun de ses points décrit une cycloïde ordinaire. Le point de contact instantané du cercle et de la droite est à ce moment le centre de rotation. OA est donc la normale à la cycloïde. Si ρ est le rayon du cercle, on a, d'après l'équation précédente, $\frac{1}{\rho}, = \frac{1}{h_0}$, c'est-à-dire que le diamètre du cercle des inflexions est égal au rayon de la roulette. Mais ceci entraîne la connaissance du rayon de courbure de la cycloïde décrite par A, et il en est de même pour les courbes cycloïdales plus générales qui sont décrites par les points du plan du cercle mobile.

(*b*) *Les épi- et les hypocycloïdes.* — Le mouvement est déterminé par le roulement de deux cercles l'un sur l'autre.

---

dentium rotarum (*Novi comment. Petr.*, t. XI, p. 207; 1765). Savary la donna à son cours de l'École Polytechnique (*Voir* CHASLES, *Journal de Liouville*, 1re série, t. X, p. 204).

Le point de contact des deux cercles est encore le centre instantané de rotation. Comme les centres des deux cercles sont les centres de courbure des courbes polaires, nous pourrons donc construire sur la normale aux courbes polaires le point correspondant du cercle des inflexions. Ainsi le diamètre de ce cercle est connu, et le centre de courbure de la trajectoire de tout point du plan pourra être construit.

(c) *Les podaires.* — Si k' est une courbe quelconque, A′ un point fixe dans son plan, et que de ce point on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à la courbe, les pieds des perpendiculaires constitueront la podaire. On peut encore la définir comme le lieu du sommet d'un angle droit dont un des côtés a passe constamment par un point fixe A′, pendant que l'autre b reste tangent à une courbe fixe. Soit B le point instantané de contact de b et k'; la perpendiculaire élevée en B sur b et celle élevée en A′ sur a se coupent au centre instantané de rotation O. Donc SO est la normale à la podaire. Nous connaissons déjà les points O et A′ du cercle des inflexions du mouvement inverse; ce cercle contient aussi le centre de courbure de la courbe donnée k'. Si donc on connaît le rayon de courbure de k', on pourra construire le cercle des inflexions et, par suite, aussi le rayon de courbure de la podaire.

5. Un dernier exemple. Supposons qu'un système plan σ se déplace de telle façon qu'une de ses droites g jouisse de la propriété de rester tangente à la trajectoire d'un de ses points A. La perpendiculaire l, élevée en A sur g, est également une droite fixe de σ. Elle est toujours normale à la trajectoire de A et, par conséquent, passe par le centre instantané de rotation. A chaque instant, un des points de l devient donc centre instantané, c'est-à-dire que dans σ le lieu de ces points est l, qui est donc la courbe polaire de σ.

Le point A décrit une développante de la courbe polaire du système σ'. Cette développante est en même temps l'enveloppe de g. La droite g enveloppe, par suite, la courbe que décrit son point de contact. Donc :

Si un système σ se déplace de telle façon que l'une des droites du système enveloppe la même courbe que celle que

décrit son point de contact, la normale l à la courbe est l courbe polaire de σ et sa développée est la courbe polaire de σ'.

On peut, dans ce cas, déterminer immédiatement les cercles des inflexions de σ et de σ'. Il suit, en effet, de l'équation de Savary, qu'ils ont pour diamètre le rayon de courbure de la développée.

6. Dans l'équation de Savary, que l'on a établie plus haut, les rayons de courbure ρ et ρ' sont définis de telle façon que chacun d'eux doit être considéré comme positif quand il est, par rapport à la tangente à la courbe polaire, du même côté que le cercle des inflexions de son système.

S'il arrive que ρ et ρ' soient du même côté de cette tangente et que ρ soit égal à ρ', l'expression $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ est nulle, et h_0, c'est-à-dire le diamètre du cercle des inflexions, est infiniment grand. Dans ce cas, le cercle des inflexions se réduit à la tangente à la courbe polaire.

Cette conclusion, tirée de l'équation de Savary, est liée à une condition. Nous la trouverons de la manière suivante :

Imaginons d'abord que les rayons de courbure ρ et ρ' soient toujours tournés de côtés différents, les courbes polaires se toucheront extérieurement et rouleront extérieurement l'une sur l'autre. Mais si ρ et ρ' sont dirigés du même côté, les courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ se toucheront intérieurement et il y aura un roulement intérieur.

Pour fixer les idées, admettons que, à un instant quelconque, ρ soit plus petit que ρ', et considérons σ comme système mobile et σ' comme système fixe; alors la courbe $\mathfrak{C}$ roulera momentanément dans l'intérieur de $\mathfrak{C}'$. Mais, si les deux rayons de courbure deviennent peu à peu égaux entre eux, le diamètre du cercle des inflexions croîtra toujours et finira par devenir infiniment grand.

Si, après que ρ et ρ' seront devenus égaux, ρ devient plus grand que ρ', la courbe $\mathfrak{C}'$ sera à l'intérieur de $\mathfrak{C}$, qui alors entourera $\mathfrak{C}'$, et nous nous rendons compte que, dans le moment où ρ et ρ' deviennent égaux entre eux, un changement de sens a lieu dans la rotation du système σ. Dans cet instant,

abstraction faite du centre instantané, tout point A du système et, par conséquent aussi, tout point de la tangente à la courbe polaire passera par un point de rebroussement, et aucun point ne passera à ce moment par un point d'inflexion. Cela a lieu aussi bien pour le mouvement direct que pour le mouvement indirect. Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Si, à un moment quelconque du déplacement, les courbes polaires se touchent intérieurement, et que la différence de leurs rayons de courbure change en même temps de signe, tous les points des deux systèmes passeront par des points de rebroussement de leurs trajectoires.

Inversement, on voit que les courbes polaires devront jouir de la propriété énoncée ci-dessus pour qu'à un instant donné *tous* les points du système passent par un point de rebroussement de leurs trajectoires, à l'exception du centre instantané. Si, par exemple, un cercle roule sur une section conique et que le diamètre du cercle soit compris entre les deux axes de l'ellipse, cela arrivera aux points où le cercle est osculateur à la conique ([1]).

([1]) Voir MEHMKE, *Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene* (*Schlömilch's Zeitschrift f. Math.*, Vol. 35, p. 1 et 65). Mehmke y étudie l'influence exercée sur la courbure des trajectoires par l'ordre du contact des courbes polaires et les singularités que présentent ces courbes en leur point de contact.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN CORPS AUTOUR D'UN POINT FIXE.

I. — L'axe de rotation et les cônes polaires.

1. Imaginons qu'un corps se déplace autour d'un point fixe. On désignera par S' l'espace immobile dans lequel il se meut. Nous supposons que le corps S soit illimité dans toutes les directions. Chacun de ses points décrit dans le mouvement une courbe sphérique, et il est évident que toutes les courbes qui sont décrites par les différents points d'une droite passant par O ont les mêmes propriétés géométriques.

Il suffit donc de considérer le corps mobile S comme une gerbe et d'étudier le mouvement d'une gerbe autour de son centre. Dans la Géométrie synthétique, chaque gerbe apparaît en général comme l'ensemble de ses rayons et de ses plans. Il est important pourtant de remarquer que, étant donnée la nature de notre sujet, on devra également considérer sur chaque rayon de la gerbe l'ensemble de ses points.

De même que dans le § I du Chapitre précédent, nous désignerons les points, rayons et plans de S par des lettres sans indices lorsqu'il s'agira de définir des éléments déterminés de la gerbe S, sans qu'il soit question de leur position dans l'espace S'. Au contraire, les différentes positions qu'un point A, un rayon a ou un plan ε de S occuperont successivement seront désignées par A_0, A_1, $A_2, \ldots$, a_0, a_1, $a_2, \ldots$, ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ et S_0, S_1, S_2 seront les positions correspondantes de S dans S'.

Tous les points de la gerbe qui sont sur une sphère décrite de O comme centre se déplacent sur cette surface sphérique. Le mouvement du corps lui-même est déterminé par celui de cette sphère. C'est pourquoi on a coutume de traiter du mouvement d'un corps autour d'un point fixe en étudiant le mou-

vement d'un système sphérique sur sa propre sphère. Nous préférons, au contraire, considérer le mouvement comme étant celui d'une gerbe autour de son centre.

2. Soient donc S et S_1 deux positions quelconques de la gerbe mobile, et a_0, b_0, a_1, b_1 les positions correspondantes de deux rayons a et b. Les deux rayons a_0, a_1 sont porteurs de deux ponctuelles congruentes; les rayons forment deux couples d'angles opposés par le sommet. Nous conviendrons d'entendre toujours par angle $(a_0 a_1)$ celui des deux angles dont il faut faire tourner a_0 pour que, a_0 tombant sur a_1, les deux ponctuelles congruentes coïncident point par point.

Traçons les bissectrices a_0^m et b_0^m des angles ainsi définis $(a_0 a_1)$, $(b_0 b_1)$ et par a_0^m menons le plan α_0^ν perpendiculaire sur $(a_0 a_1)$, par b_0^m le plan β_0^ν perpendiculaire sur $(b_0 b_1)$. Les deux plans, que l'on désignera sous le nom de plans normaux des rayons a et b, se coupent suivant une droite x passant par le point fixe O, et il est facile de voir que, par une rotation autour de x, a_0 et b_0 arrivent en même temps à coïncider avec a_1 et b_1, et cela de façon que la coïncidence se fasse point par point sur chaque rayon.

Par suite de cette rotation, chaque rayon c_0 viendra donc aussi coïncider point par point avec le rayon c_1 (1). Donc :

Tout déplacement d'un corps dont un des points, O, *reste fixe, peut être ramené à une rotation autour d'un axe fixe passant par* O. *Les plans normaux de tous les rayons du corps se coupent suivant cet axe* (2).

L'axe fixe s'appelle *axe de rotation*. Si, dans les deux gerbes congruentes et concentriques, nous considérons encore l'en-

---

(1) C'est ce qu'on démontrera de la même façon que pour le théorème analogue du Chap. I, § I, 2, se rapportant aux systèmes plans.

(2) Ce théorème a été donné par Euler dans les : *Formules generales pro translatione quacunque corporum rigidorum* (*Novi Comm. Acad.*, t. XX, p. 202; 1776).

Il ne fut trouvé que vingt-cinq ans après le théorème correspondant pour un déplacement infiniment petit. Celui-ci fut découvert déjà en 1749 par d'Alembert (*Recherches sur la précession des équinoxes*, p. 83; Paris, 1749), et bientôt après par Euler lui-même [*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 185; 1750)].

semble de tous les points situés sur les rayons, c'est-à-dire si nous les considérons comme deux espaces congruents qui ont en commun le point O comme élément uni, l'axe de rotation sera la droite commune aux deux espaces, et telle que chaque point de cette droite se corresponde à lui-même. De plus, le plan ξ perpendiculaire sur x se correspond également à lui-même.

3. Si c_0 et c_1 sont deux rayons correspondants quelconques de S_0 et S_1 et si c_0^x est la droite d'intersection des plans ξ et $[c_0 c_1]$, c_0^x et c_0^m sont perpendiculaires l'une à l'autre; car c_0^x est perpendiculaire sur x, et c_0^m est la projection de x sur $[c_0 c_1]$. Donc, pour chaque rayon c du faisceau S, c_0, c_0^m, c_1, c_0^x forment un faisceau harmonique. Soient ε_0 et ε_1 deux plans correspondants de S_0 et S_1. Désignons leur ligne d'intersection par b_0 en tant que rayon de ε_0, et par a_1 en tant que rayon de ε_1. A b_0 et a_1 correspondront respectivement, dans S_1 et S_0, les rayons b_1 et a_0. Les droites correspondantes a_0^m et b_0^m sont également deux rayons homologues de ε_0 et ε_1. On les appellera h_0 et h_1; ε_0^m est le plan passant par h_0 et h_1. Les angles que ε_0^m fait avec ε_0 et ε_1 sont égaux entre eux. Si donc h_0^m est la bissectrice de l'angle $(h_0 h_1)$, h_0^m est la projection de x sur ε_0^m, c'est-à-dire que le plan $[x h_0^m]$ est perpendiculaire sur ε_0^m.

Les deux faisceaux égaux de rayons situés dans ε_0 et ε_1 engendrent un cône k^2 de deuxième classe qui a pour plans tangents ε_0, ε_1, ε_0^m et le plan double ξ. Deux des plans tangents à ce cône sont coupés par tous les autres suivant des faisceaux projectifs de rayons.

Mais, comme a_0, a_0^m, a_1, a_0^x sont quatre rayons harmoniques, $\varepsilon_0, \varepsilon_0^m, \varepsilon_1$ et ξ coupent le plan $[a_0 a_1]$ suivant un faisceau harmonique, et la même chose aura lieu pour tout autre plan $[c_0 c_1]$ du cône. Comme c_0, c_0^m, c_1, c_0^x sont aussi des rayons en situation harmonique, il s'ensuit que ε_0^m coupe le plan $[c_0 c_1]$ suivant c_0^m, c'est-à-dire que toutes les droites c_0^m qui correspondent aux différents rayons du faisceau situé dans ε se trouvent dans ε_0^m. Donc :

Si ε est un plan quelconque de la gerbe S, *et que a soit un rayon quelconque dans ce plan, les bissectrices a_0^m des angles $a_0 a_1$) sont toutes dans un seul et même plan ε_0^m.*

On appellera ce plan le *plan médian* de ε.

Donc, non seulement il correspond à chaque rayon a_0 de S_0 un rayon déterminé a_0^m, mais à tous les rayons a_0 d'un plan ε_0 correspondent les rayons a_0^m d'un plan ε_0^m. Les rayons a_0^m forment donc une gerbe en collinéation avec S_0 et S_1, et il suit de là que :

Les gerbes formées par les bissectrices a_0^m et les gerbes S_0 et S_1 sont des gerbes en collinéation qui ont comme éléments unis l'axe de rotation x et le plan ξ qui lui est perpendiculaire.

4. On peut considérer tout plan tangent au cône k^2 comme étant déterminé par les droites c_0^m et c_0^x perpendiculaires l'une sur l'autre. Mais c_0^m est toujours situé dans ε_0^m, et c_0^x dans ξ. Donc le cône k^2 peut également être engendré en déplaçant l'angle droit $(c_0^m c_0^x)$ de telle manière que son sommet reste invariablement en O, pendant que l'un de ses côtés tourne autour de O dans le plan ξ, et que la rotation de l'autre se fait dans le plan ε_0^m. Alors le plan de cet angle enveloppe le cône k^2.

Soit c le rayon de la gerbe S qui est perpendiculaire à ε; les deux faisceaux congruents dont les axes sont e_0 et e_1 engendreront un cône K^2 du second ordre. Si γ_0 et γ_1 sont les plans de ces faisceaux qui sont perpendiculaires sur c_0 et c_1 la ligne d'intersection $(\gamma_0\, \gamma_1)$ est perpendiculaire au plan $[c_0\, c_1]$, c'est-à-dire que K^2 est le cône supplémentaire de k^2. Mais c_0, c_0^m, c_1, c_0^x sont quatre rayons harmoniques, et c_0^m et c_0^x sont les bissectrices des angles que font entre elles c_0 et c_1. Il s'ensuit immédiatement que γ_0, γ_1 et les plans γ_m et γ_x qui sont perpendiculaires sur c_0^m et c_0^x se coupent tous suivant la génératrice $(\gamma_0\, \gamma_1)$, qu'ils forment un faisceau de plans en situation harmonique, et que γ_m et γ_x bissectent les angles dièdres formés par γ_0 et γ_1. De plus, la droite c_0^x est toujours dans le plan ξ et c_0^m toujours dans ε_0^m. Donc γ_x passe par x et γ_m par la droite m perperdiculaire à ε_0^m. Le cône K^2 contient donc x et m et peut aussi être engendré au moyen des deux plans γ_x et γ_m qui tournent autour de x et de m, en restant toujours perpendiculaires l'un sur l'autre.

C'est pourquoi ce cône sera désigné sous le nom de cône

orthogonal [1]. Les faisceaux qu'engendrent les plans γ_x et γ_m sont projectifs. Soit α un plan quelconque perpendiculaire à x. Il coupe les deux faisceaux de plans suivant des faisceaux de rayons. Mais le rayon $(\alpha\gamma_m)$ est l'intersection de deux plans perpendiculaires à γ_x; donc il est perpendiculaire sur γ_x, et, par conséquent aussi, sur la droite $(\alpha_x\gamma)$, suivant laquelle γ_x est coupé par α. Deux rayons correspondants de deux faisceaux sont donc perpendiculaires l'un sur l'autre; ils engendrent un cercle, et la ligne de jonction des points (αx) et (αm) est un diamètre du cercle. La même chose a lieu pour les plans perpendiculaires à m.

Observons encore que deux cônes réciproques sont tellement situés l'un par rapport à l'autre que les lignes focales de l'un sont perpendiculaires aux plans cycliques de l'autre; nous obtiendrons finalement le résultat suivant :

Les plans qui passent par les rayons correspondants c_0 et c_1 de deux faisceaux de rayons ε_0 et ε_1 enveloppent un cône qui a pour lignes focales l'axe de rotation x et la perpendiculaire élevée en O sur ε_0^m. Chacune de ces droites est perpendiculaire à un plan tangent du cône, x à ξ et m à ε_0^m.

Les droites suivant lesquelles se coupent les plans correspondants de deux faisceaux e_0 et e_1 de S_0 et S_1 engendrent un cône orthogonal. Si e_0 et e_1 sont les axes des deux faisceaux, et que ε soit le plan de la gerbe S qui est perpendiculaire à e, ξ et ε_0^m sont les plans cycliques de ce cône.

Soient g et h deux génératrices du cône K^2 qui sont symétriquement placées par rapport au plan diamétral $[x\, m]$. K^2 résultera de l'intersection des faisceaux projectifs

$$g[e_0\, x\, e_1\, m], \quad h[e_0\, x\, e_1\, m].$$

Mais on a démontré plus haut que

$$\wedge(e_0\, g\, x) = \wedge(x\, g\, e_1) = \tfrac{1}{2}\wedge(e_0\, g\, e_1),$$
$$\wedge(e_0\, h\, x) = \wedge(x\, h\, e_1) = \tfrac{1}{2}\wedge(e_0\, h\, e_1).$$

---

[1] Cette dénomination est due à Schröter : *Ueber ein Hyperboloid besonderer Art* (*Jour. für reine und angew. Math.*, t. LXXXV, p. 41 et 79). Turazza découvrit que les cônes qui se présentent ici sont orthogonaux (*Memorie del Reale Inst. Veneto*, t. XV, p. 474).

De plus

$$\wedge (e_0\, g\, e_1) = \wedge (e_0\, h\, e_1).$$

Donc aussi

$$\wedge (e_0\, g\, x) = \wedge (e_0\, h\, x) \quad \text{et} \quad \wedge (x\, g\, e_1) = \wedge (x\, h\, e_1).$$

Trois plans de l'un des faisceaux font donc entre eux les mêmes angles que les plans correspondants de l'autre faisceau; donc les deux faisceaux sont congruents, et il suit de là que :

Deux rayons qui font le même angle avec l'axe de rotation peuvent servir à engendrer le cône orthogonal K^2 *au moyen de deux faisceaux de plans congruents.*

Il en résulte pour le cône supplémentaire :

Deux plans de k^2, *qui font le même angle avec l'axe de rotation, sont coupés par l'ensemble des plans tangents suivant deux faisceaux congruents de droites.*

5. Les résultats obtenus plus haut sont indépendants de la grandeur du déplacement que subit la gerbe S. Ils subsistent donc lorsque les positions S_0 et S_1 se rapprochent indéfiniment.

Nous pourrons les appliquer à deux positions infiniment voisines d'un corps qui exécute un déplacement quelconque autour d'un point fixe. Alors les plans $[a_0\, a_1]$ deviennent les plans tangents aux surfaces coniques engendrées par les rayons du corps, et les plans a_0^γ deviendront les plans normaux.

Donc :

*Lorsqu'un solide se déplace autour d'un point fixe, il exécute à chaque instant une rotation infiniment petite autour d'un axe passant par le point fixe. Cet axe s'appelle l'*axe instantané de rotation. *Les plans normaux aux cônes décrits par les rayons du corps passent par cet axe.*

Et encore :

Les plans tangents à toutes les surfaces coniques que décrivent les rayons d'un plan ε *enveloppent à chaque instant un*

cône de second ordre qui est tangent à ε et au plan ξ perpendiculaire à l'axe de rotation. Le cône est supplémentaire d'un cône orthogonal et a pour lignes focales l'axe de rotation et la normale à ε.

Chaque plan de la gerbe enveloppe un cône au cours du mouvement. Chacune des génératrices est la droite d'intersection de deux positions infiniment voisines de ε. Pour obtenir les propriétés de ces surfaces, nous ferons se rapprocher indéfiniment ε_0 et ε_1. A la limite, ε_0^m se confondra avec ε_0 et h_0^m deviendra génératrice de contact de ε avec la surface conique. Comme pour tout déplacement de la gerbe S, ε_0^m est perpendiculaire sur le plan $[xh_0^m]$; la projection de x sur ε est à chaque instant la droite suivant laquelle ε touche son enveloppe. Le plan normal à la surface conique passe donc toujours par l'axe de rotation.

6. Soit K une surface conique quelconque de la gerbe mobile, le même théorème aura lieu pour l'enveloppe de K. Si, en effet, K_0, K_1, K_0^m sont les surfaces coniques correspondantes de S_0, S_1, S_0^m, nous ferons passer par l'axe de rotation un plan π_0^m normal à K_0^m le long de b_0^m. Construisons alors le plan β_0^m qui touche K_0^m suivant b_0^m, et déterminons les droites et les plans correspondants dans S_0 et S_1. Le plan S_0 touche le cône K_0 le long de b_0, de même S_1 touchera K_1 le long de b_1; b_0 et b_1 sont les droites d'intersection de S_0^m avec S_0 et S_1. Comme b_0^m est la projection de l'axe de rotation sur S_0^m, b_0 et b_1 sont ses projections sur S_0 et S_1. Donc, les plans homologues de π_0^m sont π_0 et π_1, plans normaux aux cônes K_0 et K_1 suivant b_0 et b_1.

Si nous passons à la limite, S_0^m deviendra le plan tangent à l'enveloppe de K, et il s'ensuit que le plan normal à l'enveloppe de K passe à chaque instant par l'axe de rotation.

Donc :

Lorsqu'un corps se meut autour d'un point fixe, les plans normaux aux enveloppes de tous les plans et de tous les cônes de ce corps le long des génératrices de contact passent par l'axe instantané de rotation.

En particulier, il suit encore que :

Si g est l'axe d'un faisceau quelconque de plans de S, *l'ensemble des rayons suivant lesquels ces plans touchent leurs enveloppes forme à chaque instant un cône orthogonal dont les plans cycliques sont perpendiculaires sur g et sur l'axe instantané de rotation.*

Pendant le mouvement continu de la gerbe S, l'axe instantané de rotation changera à chaque instant aussi bien dans S que dans l'espace fixe S'. L'ensemble des axes forme, dans S comme dans S', une surface conique. Pour reconnaître la manière dont ces surfaces se comportent l'une vis-à-vis de l'autre, nous n'avons qu'à reprendre, dans la géométrie de la gerbe, les recherches qui ont été faites au § II du Chapitre I pour la géométrie du plan. Nous reconnaîtrons alors que la surface conique Γ de la gerbe S roule sur la surface conique Γ' de l'espace invariable, c'est-à-dire que :

Tout mouvement d'un corps autour d'un point fixe a lieu de telle façon qu'un cône appartenant au corps mobile roule sur un cône de l'espace fixe.

Nous appellerons ces cônes *cônes des axes* ou *cônes polaires* ([1]).

7. Imaginons un observateur qui soit invariablement lié à la gerbe S; pour lui l'espace S' se déplacera dans la gerbe S. Ce déplacement sera encore qualifié d'*inversion* du premier mouvement.

Les notations seront choisies en tout semblables à celles du Chapitre I. Nous considérerons maintenant l'espace S' comme formant également une gerbe; nous désignerons ses rayons et ses plans par a' et ε' lorsque leur position vis-à-vis de S ne sera pas en question, et par a'_0, a'_1, a'_2, ..., ε'_0, ε'_1, ε'_2, ... leurs positions successives. Les droites et les plans dérivés seront $a_0^{m'}$, $\alpha_0^{\nu'}$, $\varepsilon_0^{m'}$, ...

Les théorèmes concernant les rapports des deux mouvements trouvés au Chapitre précédent se présenteront encore ici sous une forme analogue. En premier lieu, on voit que le

([1]) Les cônes polaires ont été découverts par Poinsot (*Journal de Liouville*, t. XVI, p. 26).

mouvement inverse est caractérisé par le roulement du cône polaire Γ' de S' sur le cône polaire Γ de S. De plus, chaque rayon b' de S' décrit une surface conique située dans S. Soient encore S_0 et S_1 deux positions de la gerbe S par rapport à S', par suite S'_0 et S'_1 les positions correspondantes de la gerbe S' par rapport à S. Nous construirons le plan normal a_0^v d'un rayon quelconque a_0 de S_1 et nous considérerons un rayon quelconque b'_0 de ce plan. On peut montrer que le plan normal $\beta_0^{v'}$ de b'_0 passe par a_0. En effet, les angles que b'_0 fait avec a_0 et a_1 sont égaux; il faut donc que, dans le mouvement inverse, a_0 fasse avec b'_0 et b'_1 des angles égaux, car cette propriété est indépendante de l'immobilité de S ou de S'. Donc :

Si le plan normal du rayon a de S *passe par le rayon b' de* S', *dans le mouvement inverse, le plan normal de b' passera par a.*

De même, pour un mouvement continu :

Si, à un instant quelconque, le plan normal à la surface conique décrite par a passe par le rayon b' de S', *dans le mouvement inverse, le plan normal à la surface conique que décrit b' dans* S *passera par a.*

Avec l'aide de ces théorèmes, nous démontrerons, exactement de la même manière qu'au précédent Chapitre, l'existence d'une relation quadratique entre S et S'.

II. — La correspondance quadratique.

1. Soient S_0, S_1, S_2 trois positions arbitraires de la gerbe S. Désignons par a_0, a_1, a_2 les positions correspondantes d'un rayon a de S; et de plus par a_0''' et a_1''' les bissectrices des angles $(a_0 a_1)$ et $(a_1 a_2)$; par α_0^v et α_1^v les plans normaux correspondants. Les deux plans α_0^v et α_1^v se coupent suivant une droite a' qui est l'axe d'un cône de révolution passant par a_0, a_1, a_2. Considérons un plan quelconque ε_0 de S_0; les plans normaux de ses rayons forment un faisceau de plans dont l'axe est x'_{01}, et qui est en position perspective avec les rayons du plan médian. De même, les plans normaux α_1^v forment un

faisceau perspectif aux rayons a_1^m du plan médian ε_1^m qui a pour axe x'_{12}.

Les deux faisceaux sont donc projectifs et engendrent un cône du second ordre qui passe par x'_{01} et x'_{12}. Mais il contient aussi l'axe de rotation x'_{20} commun aux gerbes S_2 et S_0, car chaque rayon a est l'intersection des trois plans normaux qui bissectent les angles $(a_0 a_1)$, $(a_2 a_0)$, $(a_1 a_2)$, et sont perpendiculaires aux plans de ces angles. Comme a' est à la fois dans α_0^ν et α_1^ν, il résulte de l'avant-dernier théorème du précédent numéro que a est la droite d'intersection des plans normaux $\alpha_0^{\nu'}$ et $\alpha_1^{\nu'}$ dans le mouvement inverse; c'est donc l'axe du cône de révolution qui contient a'_0, a'_1, a'_2. La signification géométrique des rayons a et a' de S et S' qui se correspondent de cette façon est donc complètement réciproque. Il s'ensuit qu'inversement, si les rayons a' de S' sont dans un plan ε'_1 les droites correspondantes a de S formeront un cône du second ordre qui passe par x_{20}, x_{01}, x_{12}. Deux gerbes qui sont liées de cette façon l'une à l'autre sont dites en correspondance quadratique, et x_{12}, x_{20}, x_{01} ou x'_{12}, x'_{20}, x'_{01} sont les *rayons principaux*. Il suit de là que :

Si à chaque rayon a de la gerbe S *nous faisons correspondre le rayon a' de la gerbe* S', *suivant lequel se coupent les plans normaux α_0^ν et α_1^ν, a sera aussi l'intersection des plans normaux $\alpha_0^{\nu'}$ et $\alpha_1^{\nu'}$ pour le mouvement inverse. Les deux gerbes qui sont ainsi liées l'une à l'autre sont en correspondance quadratique. Les rayons principaux de* S' *sont les trois axes de rotation du mouvement direct, et les rayons principaux de* S *sont les axes de rotation du mouvement inverse.*

Les axes de rotation x_{12}, x_{20}, x_{01} de la gerbe S forment un trièdre, et de même ceux de S'. On démontrera d'une manière analogue à ce qui a été fait pour la Géométrie plane (Chap. I, § II, 2) que les deux trièdres sont des *figures symétriques*. Supposons que les gerbes S et S' soient dans la position origine S_0 et S'_0, alors x_{01} et x'_{01} coïncideront, ainsi que x_{20} et x'_{20}.

2. Continuons à supposer que S et S' soient dans la position origine, S_0 et S'_0. Soit η un plan quelconque perpendiculaire

à x_{01}, il coupera les deux systèmes qui se correspondent quadratiquement suivant deux systèmes plans reliés de la même façon. Les points principaux seront X_{12}, X_{20}, X_{01}, et X'_{12}, X'_{20}, X'_{01}, qui sont les points d'intersection de η avec les lignes principales de la gerbe. Comme η est perpendiculaire sur x_{01}, les deux triangles formés par les points principaux sont des figures symétriques. Donc les systèmes plans superposés sont complètement identiques avec les systèmes plans correspondants σ et σ' que nous avons étudiés au Chapitre précédent. Il nous est donc permis de transporter au cas présent les résultats obtenus. Les systèmes plans, intersections de η avec S et S', seront aussi désignés par σ et σ', et nous pourrons appliquer à ces systèmes tous les résultats trouvés en Géométrie plane ([1]).

Nous avons ainsi résolu en principe les problèmes qui se rattachent à la correspondance quadratique de S et de S'. Il nous suffira de déduire, des propriétés connues des systèmes σ et σ', les propriétés correspondantes des gerbes S et S'.

A la droite de l'infini de l'un des systèmes plans, correspond dans l'autre le cercle circonscrit au triangle des points principaux. Mais la droite de l'infini de chacun des deux systèmes est l'intersection des plans ξ_{01} et η, $\xi_{01} = \xi'_{01}$ étant le plan normal perpendiculaire à $x_{01} = x'_{01}$. Il s'ensuit qu'au plan ξ_{01} correspond, dans chaque gerbe, un cône qui passe par l'axe de rotation, et qui est coupé suivant des cercles par les plans perpendiculaires sur x_{01}. Ce cône est donc orthogonal, et il est visible qu'il est complètement déterminé par les trois rayons principaux. Nous désignerons le cône de S qui correspond au plan ξ'_{01} par W_{012} et celui de S' qui correspond au plan ξ_{01} par W'_{012}; on a démontré que les deux cercles des inflexions situés dans σ et σ' ont même diamètre, donc les angles d'ouverture de W_{012} et W'_{012} sont égaux entre eux.

([1]) Aronhold, dans les conférences de Géométrie cinématique qu'il fit au Polytechnicum de Berlin, montra le premier comment on peut ramener à des constructions planes celles qui se présentent par la gerbe. Sa méthode a été exposée par Buka. Elle contient déjà les principes de la représentation donnée dans le texte [*Voir* BUKA, *Das sphärische Kurbelgetriebe* (*Inaugural Dissertation,* Göttingen, 1876)].

3. Si les positions S_0, S_1, S_2 se rapprochent indéfiniment, nous obtiendrons des théorèmes applicables à chaque instant au mouvement d'un corps autour d'un point fixe. Alors a' devient l'axe de courbure de chaque point de a. Nous désignerons cette droite sous le nom d'*axe de courbure du rayon* a. Dans ce sens a sera aussi l'axe de courbure de a' pour le mouvement inverse, et l'on a ce théorème :

Si un corps se meut autour d'un point fixe, et si a' est l'axe de courbure du rayon a, a sera de même axe de courbure de a' pour le mouvement inverse. Si nous faisons correspondre ces rayons l'un à l'autre, les gerbes de rayons qui se correspondent ainsi sont en correspondance quadratique. Les rayons principaux se confondent avec l'axe instantané de rotation, et les plans principaux avec le plan tangent commun aux cônes polaires.

Les cônes orthogonaux W_{012} et W'_{012} deviendront à la limite deux cônes également orthogonaux W et W' qui touchent le plan tangent commun aux cônes polaires Γ et Γ', le long de l'axe instantané de rotation. Imaginons que le plan normal à Γ et Γ' mené par x coupe le cône W en u et W' en v'; x et v seront les deux rayons de W sur lesquels les plans de sections circulaires sont perpendiculaires, et x' et v' les rayons analogues du cône W'. Chaque rayon s de W est caractérisé par ce fait que son axe de courbure est perpendiculaire sur x, et la même chose a lieu pour les rayons t' du cône W' dans le mouvement inverse. Les rayons des deux cônes jouissent encore d'une autre propriété géométrique. Le plan (sx) est le plan normal du rayon s; de plus, chacun des rayons s est projeté de x et de u au moyen de deux plans perpendiculaires; donc le plan $[su]$ est le plan tangent le long de s. La même chose a lieu pour les rayons du cône W', et cela aussi bien pour le mouvement direct que pour le mouvement inverse. Donc :

Les plans tangents aux cônes trajectoires des rayons du cône orthogonal W *passent tous par une même droite, savoir la droite u de ce cône. De même les plans tangents des rayons du cône orthogonal* W' *passent tous par le rayon v' de ce*

cône. Cela a lieu aussi bien dans le mouvement direct que dans le mouvement inverse.

Nous venons de faire voir qu'aux rayons de tout plan ε de S correspond, dans la gerbe S′, un cône du second ordre qui contient les trois axes de rotation x'_{12}, x'_{20}, x'_{01} du mouvement inverse. Cela a lieu pour des positions quelconques S_0, S_1, S_2 de la gerbe S, donc aussi pour des positions infiniment voisines. Dans ce cas W′ sera osculateur le long de x au cône du second ordre dont il vient d'être fait mention, et la même chose a lieu pour W, par rapport au cône qui correspond aux rayons d'un plan ε' de S′.

Donc :

Tous les cônes du second ordre de la gerbe S′ *qui correspondent aux plans* ε *de la gerbe* S *sont osculateurs au cône orthogonal* W′ *le long de l'axe instantané de rotation; de même, le cône orthogonal* W *est osculateur à tous les cônes du second ordre de la gerbe* S *qui correspondent aux faisceaux plans de rayons de* S′.

Les cônes W et W′ jouent, dans la correspondance quadratique des deux gerbes le même rôle que les cercles des inflexions dans la correspondance quadratique des plans σ et σ'.

4. Nous avons démontré, au § VI du Chapitre précédent, que la signification géométrique des deux points correspondants A et A′ des systèmes plans σ et σ', en relation quadratique, pouvait s'étendre aux enveloppes des courbes du système.

La même chose a lieu, comme on va le faire voir, pour le mouvement d'une gerbe de rayons autour d'un point fixe.

Soit, en effet, R un cône de révolution quelconque de la gerbe S; R_0, R_1, R_2 ses positions dans S_0, S_1, S_2 et R_0''', R_1''' les cônes correspondants des gerbes S_0''', S_1''' en collinéation avec S. En général, ce ne sont pas des cônes de révolution, mais cela n'est pas essentiel, comme le montre la suite de ces recherches.

Soit a l'axe du cône R, a_0, a_1, a_2 ses positions dans S_0, S_1, S_2

et a_0''', a_1''' les droites correspondantes de S_0''' et S_1'''. Les plans

$$[a_0 x'_{01}] = \pi_0, \qquad [a_0''' x'_{01}] = \pi_0''', \qquad [a_1 x'_{01}] = \pi_1$$

sont des plans correspondants des gerbes S_0, S_0''' et S_1.

Soit b_0''' l'une des droites suivant lesquelles π_0''' coupe le cône R_0''', et, pour fixer les idées, admettons que b_0''' soit situé entre x'_{01} et a_0'''. Alors π_0 coupera le cône R_0 suivant b_0, et π_1 le cône R_1 suivant b_1, et b_0 sera également situé entre x'_{01} et a_0; b_1 entre x'_{01} et a_1. Enfin, soit β_0''' le plan tangent au cône R_0''' le long de b_0'''; les plans correspondants β_0 et β_1 seront des plans tangents aux cônes R_0 et R_1.

Construisons de la même façon les plans correspondants

$$[a_1 x'_{12}] = \rho_1, \qquad [a_1''' x'_{12}] = \rho_1''', \qquad [a_2 x'_{12}] = \rho_2$$

des gerbes S_1, S_1''' et S_2, et désignons par c_1''' le rayon situé entre a_1''' et x'_{12} suivant lequel ρ_1''' coupe le cône R_1'''. Alors R_1 sera coupé par ρ_1 suivant c_1 et R_2 par ρ_2 suivant c_2.

Nous désignerons par γ_1''' le plan tangent à R_1''' le long de c_1'''; γ_1 touchera le cône R_1 le long de c_1 et γ_2 sera tangent à R_2 le long de c_2.

Soit maintenant K un cône quelconque de la gerbe S, qui ne sera assujetti qu'à toucher le cône de révolution R, suivant les deux génératrices b et c. Concevons ensuite que la rotation autour de x'_{01} devienne infiniment petite; alors β_0''' deviendra, comme on l'a démontré au paragraphe précédent, le plan tangent à l'enveloppe de K; b_0''' deviendra la génératrice de contact et π_0''' le plan normal à l'enveloppe suivant ce rayon. De même, si la rotation autour de x'_{12} devient infiniment petite, x'_{12} sera l'axe instantané de rotation, γ_1''' le plan tangent, c_1''' le rayon de contact et ρ_1''' le plan normal à l'enveloppe.

Admettons encore que x'_{01} et x'_{12} soient deux génératrices infiniment voisines du cône polaire, il s'ensuit immédiatement que le rayon d'intersection des deux plans normaux π_0''' et ρ_1''' devient l'axe de courbure de l'enveloppe de K_1 et R le cône de courbure de K suivant le rayon b; c'est-à-dire que pour tout cône K qui a R comme cône de courbure, la droite qui est la position limite de l'intersection de π_0''' et ρ_1''' sera l'axe de courbure de l'enveloppe correspondante.

Il nous faut encore montrer que cette droite est réellement l'axe de courbure de la surface engendrée par a, c'est-à-dire la droite a' de S'. Cela résulte de ce qui suit :

Soit α_0^m le plan passant par a_0^m et perpendiculaire sur π_0^m. Il est facile de voir que π_0 est perpendiculaire au plan correspondant α_0 de S_0, et π_1 perpendiculaire sur α_1. Donc a_0, a_1, a_0^m sont les projections de x'_{01} sur α_0, α_1, α_0^m, c'est-à-dire que a_0 et a_1 sont les droites d'intersection du plan α_0^m avec α_0 et α_1. Le plan α_0^m est donc identique avec le plan $[a_0 a_1]$. Par conséquent, π_0^m est identique avec le plan normal $\alpha_0^\vee$ du rayon a qui correspond aux positions S_0 et S_1. De même, ρ_1^m est identique avec le plan normal $\alpha_1^\vee$ qui correspond à S_1 et S_2, c'est-à-dire que la ligne d'intersection de π_0^m et de ρ_1^m est, en effet, en même temps ligne d'intersection de $\alpha_0^\vee$ et de $\alpha_1^\vee$, et se confond à la limite avec a'.

Désignons l'enveloppe du cône K par K', et remarquons que, dans le mouvement inverse, K est l'enveloppe de K', nous arrivons au théorème général suivant :

Si K *et* K' *sont deux surfaces coniques quelconques des deux faisceaux dont l'un enveloppe l'autre, leurs axes instantanés de courbure pour la génératrice de contact sont deux rayons correspondants a et a' dans la relation quadratique qui caractérise l'instant considéré du mouvement.*

La signification des cônes W et W' peut être étendue au moyen de ce théorème. Soient encore K et K' deux surfaces coniques de l'espèce considérée. Si l'axe de courbure de l'un des cônes de K, par exemple, est situé dans le plan ξ, celui du cône K' sera sur la surface conique W' de la gerbe S'; et si l'axe de courbure de K est sur le cône orthogonal W de la gerbe S', celui de K' sera dans le plan ξ.

III. — Relations métriques et exemples.

1. Comme on l'a montré plus haut, les deux gerbes S et S' sont coupées par tout plan η perpendiculaire à l'axe instantané de rotation, suivant deux systèmes en correspondance quadratique. Les cercles des inflexions de ces deux systèmes

sont les cercles d'intersection de η avec les cônes orthogonaux W et W'.

Donc, toute construction relative au mouvement d'une gerbe doit être considérée comme effectuée, si nous savons faire la construction correspondante dans le mouvement d'un système plan; car il nous suffit de la transporter du domaine de la géométrie du plan dans celui de la géométrie de la gerbe.

Qu'il nous soit permis de ne pas énoncer, dans le cas d'une gerbe de rayons, les constructions indiquées au § IV. Nous ne ferons qu'établir quelques-unes des relations précédemment obtenues sous la forme qui convient à la géométrie de la gerbe.

2. Si les rayons a de S sont dans un plan ε, qui passe par l'axe instantané de rotation, les rayons correspondants a' seront aussi dans ce plan. Les rayons a et a' forment deux faisceaux projectifs superposés de rayons qui ont en commun le rayon uni x, axe de rotation. Si s et t' sont les rayons différents de x, suivant lesquels W et W' sont coupés par le plan ε, nous poserons

$$\wedge(a\,x) = \lambda, \qquad \wedge(a'\,x) = \lambda', \qquad \wedge(s\,x) = \wedge(t'\,x) = \mu;$$

et dans ces relations on définira les angles λ et λ' d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les longueurs r et r' dans le plan. Alors, du Chap. I, § IV, 3, on tire immédiatement la relation

$$\cot\lambda + \cot\lambda' = \cot\mu.$$

Désignons par α l'angle que fait le plan ε avec le plan normal commun aux cônes polaires, et appelons φ l'angle sous lequel ce plan normal coupe les cônes orthogonaux, nous aurons

$$(\cot\lambda + \cot\lambda')\cos\alpha = \cot\varphi.$$

L'expression qui se trouve dans le premier membre de cette équation est donc une constante pour tous les couples de rayons correspondants. Les axes de courbure des deux cônes Γ et Γ' pour la génératrice de contact forment un couple de

rayons correspondants, a et a'. Désignons par ψ et ψ' les angles de ces axes avec x, nous aurons

$$\cot\psi + \cot\psi' = \cot\varphi.$$

Dans les systèmes plans σ et σ', à chaque cercle de l'un des systèmes qui touche la tangente aux courbes polaires au centre instantané de rotation, correspond un cercle analogue de l'autre système. Donc, à un cône orthogonal de l'une des gerbes qui touche le plan tangent aux cônes polaires le long de l'axe de rotation, et tel que l'axe de rotation soit perpendiculaire à un plan de sections circulaires, correspond un cône orthogonal analogue dans l'autre gerbe. Cela nous donne une image nette de la distribution des rayons a et a' dans l'espace.

3. Appliquons les résultats précédents à quelques exemples. Le mouvement d'un corps autour d'un point fixe est déterminé aussitôt que l'on connaît à chaque instant la correspondance quadratique qui lie les deux gerbes S et S'.

Du Chapitre précédent nous concluons que pour cela la connaissance de deux couples de rayons correspondants est nécessaire et suffisante. Si nous obligeons deux rayons de l'une des gerbes à parcourir deux surfaces coniques fixes, ou que, plus généralement, nous nous donnions deux couples de cônes K et K' dont l'un soit l'enveloppe de l'autre, les gerbes se déplaceront l'une par rapport à l'autre d'une façon bien déterminée.

4. Le mouvement de la gerbe S est déterminé par la condition que deux rayons a et b restent dans deux plans fixes α' et β'. Le plan mené par a, perpendiculairement à α', et le plan mené par b, perpendiculairement à β', se coupent suivant l'axe instantané de rotation x. Comme a décrit le plan α', l'axe de courbure a' est la droite perpendiculaire à α'; de même l'axe de courbure de b est la droite b' normale à β'. On a déterminé ainsi deux couples de rayons correspondants des deux gerbes; par conséquent aussi leur correspondance quadratique, et celle des sections planes σ et σ'. Considérons le mouvement inverse. Il est défini par la condition imposée à

deux plans α' et β' de la gerbe S' de tourner autour de deux rayons fixes a et b de S. En particulier, si l'angle de α' et β' est droit $(\alpha'\beta')$ engendrera un cône orthogonal dont les plans de sections circulaires sont perpendiculaires à a et à b, car $(\alpha'\beta')$ sera toujours la droite d'intersection de deux plans perpendiculaires l'un sur l'autre, qui tournent autour de deux droites fixes a et b. De là résulte une construction simple du plan normal à un cône orthogonal. En effet, si c est une génératrice quelconque de ce cône, nous déterminerons les deux plans

$$(ca) = \alpha' \qquad \text{et} \qquad (cb) = \beta';$$

par a et b nous mènerons les plans normaux à α' et β'. Ces plans se couperont suivant une droite x par laquelle passe le plan normal au cône orthogonal pour le rayon c, c'est-à-dire que $[cx]$ est le plan normal. Pour construire l'axe de courbure du cône orthogonal, nous transporterons à la gerbe de rayons la construction indiquée au Chapitre précédent, § IV, 5. Désignons par β le plan $[bb']$, et par γ le plan $[cx]$. Construisons les plans $[ab]$ et $[a'b']$, et faisons passer un plan $[hx] = \eta$ par leur droite d'intersection h_1 et x.

Maintenant, contruisons un plan $\varkappa$ de telle façon que

$$\wedge(\eta\beta) = \wedge(\varkappa\gamma);$$

déterminons le plan $[ac]$, et par a' et la droite suivant laquelle $\varkappa$ est coupé par $[ac]$ menons un plan; celui-ci coupera γ suivant l'axe de courbure c'.

5. Revenons au mouvement considéré en premier lieu. La surface conique enveloppe des plans $[ab]$ est, dans le cas particulier où a et b sont à angle droit, le cône supplémentaire d'un cône orthogonal. Cela suit immédiatement de ce qu'on a vu dans ce Chapitre au § I, 4.

En effet, $[ab]$ est le plan d'un angle droit qui se meut autour de son sommet de telle façon que l'un de ses côtés reste toujours dans le plan α', et l'autre dans le plan β'.

Si donc k^2 est un cône quelconque dont le cône supplémentaire soit orthogonal et que ε soit un de ses plans tangents, on pourra construire comme il suit la génératrice de

contact : soient α' et β' les plans qui sont perpendiculaires sur les lignes focales de k^2; déterminons les droites d'intersection $(\alpha'\varepsilon) = a$ et $(\beta'\varepsilon) = b$; menons par a un plan perpendiculaire à α'; par b un plan perpendiculaire à β', et, par la droite d'intersection x de ces deux plans, menons un plan perpendiculaire à ε, il coupera ε suivant la génératrice de contact e.

On pourra aussi construire l'axe de courbure du cône k^2 pour la génératrice e. Cela se fera de la même façon que pour le cône orthogonal. Car la droite a', perpendiculaire à α', est encore le rayon correspondant à a, et de même b' perpendiculaire à β' correspond à b. On doit considérer le plan ε et le cône k^2 comme s'enveloppant l'un l'autre. Donc l'axe de courbure c' du cône est le rayon de S' qui correspond à la droite c perpendiculaire à ε. On peut alors le construire comme on l'a déjà fait pour le cône orthogonal.

6. Supposons que la gerbe S se déplace de telle façon que le plan α passe toujours par un rayon a' de S', pendant qu'un rayon b de ce plan décrit le cône de révolution K'.

On sait immédiatement construire l'axe instantané de rotation. Il se trouve, d'un côté, dans le plan diamétral passant par b, et comme, d'autre part, lors du mouvement inverse, a' reste toujours dans α, il est aussi dans un plan passant par a' et normal à α.

De là il suit que le rayon correspondant à a' est le rayon a de S perpendiculaire à α. Le rayon correspondant à b est l'axe b' du cône de révolution. On a ainsi déterminé encore deux couples de rayons correspondants, et par suite la relation quadratique qui existe entre S et S'.

Dans le mouvement inverse, le rayon a' de S' parcourt le plan α, et le cône K' passe toujours par la droite b de la gerbe S. Mais comme, dans le mouvement direct, b décrit un cône de révolution dont b' est l'axe, dans le mouvement inverse b' décrira un cône de révolution K dont l'axe est b. Le mouvement inverse peut donc aussi se définir en assujettissant le rayon a' à parcourir le plan α et le rayon b' à rester sur un cône de révolution.

En définissant le mouvement inverse de cette manière,

nous reconnaissons facilement que le mouvement étudié plus haut n'est qu'un cas particulier de celui-ci. Car, si le cône de révolution dégénère en un plan, non seulement a' se déplacera dans un plan, mais b' en fera autant, c'est-à-dire que les deux rayons de S' se déplacent dans deux plans fixes de la gerbe S.

IV. — Les cônes des inflexions.

1. Nous avons montré que les cônes orthogonaux W et W' jouent par rapport à la correspondance quadratique des deux gerbes S et S' le même rôle que les cercles des inflexions dans le plan; mais les cercles des inflexions ont une double signification cinématique. Ils forment en effet le lieu des points qui passent par un point d'inflexion de leur trajectoire, et cette propriété ne s'étend pas aux génératrices des cônes orthogonaux. Un rayon de S qui, à ce point de vue, sera analogue à un point du cercle des inflexions doit jouir de cette propriété que ses trois positions consécutives soient dans un même plan, c'est-à-dire que a et a' seront perpendiculaires l'un sur l'autre. Mais ceci n'a pas lieu, en général, pour les génératrices des cônes orthogonaux. Si, en effet, v est une génératrice du cône W, le plan déterminé par v et v' passe par l'axe de rotation x, et comme v' est dans le plan ξ' normal à x, v' ne peut être perpendiculaire qu'à x. Il se pose maintenant ce problème : Existe-t-il des rayons de l'espèce considérée, et quel est le lieu de ces rayons?

2. Pour répondre à cette question, nous partirons encore de trois positions S_0, S_1, S_2 choisies arbitrairement pour la gerbe mobile S. Si ε est un plan quelconque de S_1, les faisceaux égaux de rayons situés dans ε_0 et ε_1 engendrent un cône de deuxième classe qui est celui que nous avons déjà considéré plus particulièrement au § I, 4. De même, les faisceaux situés dans ε_1 et ε_2 engendreront un pareil cône. Les deux cônes n'auront en général que ε_1 comme plan tangent commun. Il existe donc encore trois plans tangents communs et différents l'un de l'autre; dans chacun d'eux se trouvent trois rayons correspondants a_0, a_1, a_2. Le plan ε contient donc trois

rayons de l'espèce considérée, et l'ensemble de ces rayons forme un cône du troisième ordre K^3_{012}. Sur ce cône se trouvent aussi les trois axes de rotation x_{12}, x_{20}, x_{01}, car, pour chacun d'eux, deux positions coïncident.

Les plans α perpendiculaires aux génératrices de K^3_{012} jouissent de cette propriété que α_0, α_1, α_2 se coupent suivant une seule et même droite. Il existe donc une infinité de plans de cette espèce, et leur ensemble constitue un cône de la troisième classe k^3_{012} qui est le cône supplémentaire de K^3_{012}.

Si ξ_{12}, ξ_{20}, ξ_{01} sont les plans perpendiculaires sur x_{12}, x_{20}, x_{01}, ces plans seront tangents à k^3_{012}. Le plan ξ_{01} est le plan uni commun aux deux gerbes S_0 et S_1. Si la gerbe S tourne autour de x_{01}, ξ_{01} subit un déplacement dans son plan en tournant autour du point O. Ce plan renferme donc deux rayons doubles : ceux qui joignent O aux points circulaires de l'infini (Chap. I, § III, 5). Désignons-les par i_{01} et j_{01}. Avec x_{01} ils forment les trois rayons unis des deux gerbes en colliméation.

Comme i_{01} et j_{01} doivent être considérés comme immobiles lors de la rotation effectuée autour de x_{01}, chacun d'eux jouit de la propriété d'être dans le même plan pour trois positions consécutives, c'est-à-dire que i_{01} et j_{01} sont des génératrices du cône K^3_{012}. La même chose a lieu pour les rayons analogues des plans ξ_{12} et ξ_{20}, c'est-à-dire que les six droites imaginaires i_{12}, j_{12}, i_{20}, j_{20}, i_{01}, j_{01} sont sur le cône K^3_{012}.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si S_0, S_1, S_2 *sont trois positions arbitraires de la gerbe* S, *celle-ci contient une infinité de rayons pour lesquels* a_0, a_1, a_2 *sont situés dans un même plan. Ces rayons forment un cône du troisième ordre* K^3_{012} *qui contient les trois axes de rotation, et six droites imaginaires :* i_{12}, j_{12}, i_{20}, j_{20}, i_{01}, j_{01}. *De même il existe une infinité de plans* α *appartenant à la gerbe* S, *pour lesquels* α_0, α_1, α_2 *se coupent suivant une même droite. Ces plans enveloppent un cône de troisième classe* k^3_{012} *qui est le cône supplémentaire du cône* K^3_{012}.

Les cônes analogues existent dans la gerbe S' pour le mouvement inverse. Nous les désignerons par $K^{3\prime}_{012}$ et $k^{3\prime}_{012}$.

La droite d'intersection des plans α_0, α_1, α_2 est perpendiculaire au plan des droites a_0, a_1, a_2. Elle ne diffère donc pas de la droite a' qui correspond à a dans la relation quadratique qui lie les deux gerbes.

Considérons maintenant le mouvement inverse. Comme on doit désigner par a' la droite d'intersection de α_0, α_1, α_2 considérée comme faisant partie de la gerbe S', nous pouvons dire que, pour les trois positions S_0, S_1, S_2, le plan α passe toujours par a'. Dans le mouvement inverse, le rayon a' restera dans le plan α pour ses trois positions a'_0, a'_1, a'_2, c'est-à-dire que c'est un rayon du cône $K^{3\prime}_{012}$. Donc la droite correspondant à une génératrice a du cône K^3_{012} sera toujours sur le cône $K^{3\prime}_{012}$, c'est-à-dire que :

Les deux cônes K^3_{012} et $K^{3\prime}_{012}$ se correspondent dans la relation quadratique qui lie les deux gerbes S et S'.

Désignons par α' le plan des trois droites a_0, a_1, a_2, en tant que plan de S'; le rayon a restera pour les trois positions S_0, S_1, S_2 dans le même plan α' de S'. Dans le mouvement inverse, les plans α'_0, α'_1, α'_2 se couperont suivant une même droite a de S. Donc α est un plan tangent au cône $k^{3\prime}_{012}$.

4. Rapprochons indéfiniment les trois positions S_0, S_1, S_2, les génératrices a du cône K^3_{012} jouiront de la propriété de passer par des génératrices d'inflexion de leurs cônes trajectoires, et les plans α de k^3_{012} seront caractérisés par ce fait qu'ils touchent leurs cônes enveloppes suivant des génératrices de rebroussement.

D'où il suit que :

Si un corps se déplace autour d'un point fixe, il existe à chaque instant une infinité de rayons qui coïncident avec des génératrices d'inflexion de leurs cônes trajectoires. Ces droites sont sur un cône du troisième ordre K^3 qui touche le plan tangent commun aux cônes polaires, suivant l'axe instantané de rotation. Il existe un cône analogue $K^{3\prime}$ dans la gerbe S' pour le mouvement inverse (1). *Le cône supplémentaire k^3 du*

---

(1) Schell déjà mentionne brièvement le cône K^3 (*Theorie der Bewegung und der Kräfte*, t. I, p. 497).

cône K^3 *jouit de cette propriété que ses plans tangents passent par des génératrices de rebroussement de leurs enveloppes. La même chose a lieu pour le cône supplémentaire* $k^{3'}$ *du cône* $K^{3'}$ *dans le mouvement inverse.*

On désignera les cônes K^3 et $K^{3'}$ sous le nom de *cônes des inflexions,* et les cônes k^3 et $k^{3'}$ seront les *cônes de rebroussement.* Toute droite de S, qui se meut dans un plan, est située sur K^3, et tout plan qui passe toujours par une même droite est tangent à k^3.

Comme à tout rayon a de K^3 correspond, dans la relation quadratique qui caractérise l'instant considéré du mouvement, un rayon a' de S', nous pourrons encore énoncer le théorème suivant :

Le cône des inflexions $K^{3'}$ *est le lieu des axes de courbure des génératrices de* K^3; *de même, lors du mouvement inverse, le cône des inflexions* K^3 *sera le lieu des axes de courbure des rayons de* $K^{3'}$.

Les cônes K^3 et $k^{3'}$ ont aussi une certaine relation géométrique. Nous venons de faire voir que tout plan tangent α' de $k^{3'}$ contient les trois droites a_0, a_1, a_2. De même toute droite a' de $K^{3'}$ est la droite d'intersection de trois plans α_0, α_1, α_2.

En passant à la limite :

Les plans du cône $k^{3'}$ *sont les plans tangents d'inflexion des génératrices de* K^3; *et les rayons de* $K^{3'}$ *sont les génératrices de rebroussement des cônes enveloppes des plans de* k^3; *des propositions analogues ont lieu pour le mouvement inverse.*

Pour deux rayons correspondants a et a' des deux cônes des inflexions, on a la relation (§ III, 2)

$$(\cot\lambda + \cot\lambda')\cos\alpha = \cot\varphi.$$

Dans le cas présent, a et a' sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

Donc :

$$(\cot\lambda + \operatorname{tang}\lambda)\cos\alpha = \operatorname{tang}\varphi$$
$$\sin 2\lambda = 2\cos\alpha \operatorname{tang}\varphi.$$

Cette équation détermine pour chaque plan passant par l'axe instantané de rotation les deux rayons qu'il a en commun avec le cône des inflexions.

5. Considérons maintenant quatre positions données à volonté S_0, S_1, S_2, S_3 de la gerbe S. Le cône des inflexions qui correspond aux positions S_0, S_1, S_2 du système sera encore K^3_{012} et le cône des inflexions qui correspond aux positions S_1, S_2, S_3 et qui, par conséquent, contient tous les rayons a de S pour lesquels a_1, a_2, a_3 sont dans un même plan, sera désigné par K^3_{123}. Les deux cônes se couperont, en général, suivant neuf génératrices a, et chacune d'elles est caractérisée par ce fait que a_0, a_1, a_2, ainsi que a_1, a_2, a_3 sont dans un même plan. Les quatre positions a_0, a_1, a_2, a_3 sont donc, pour chacune de ces génératrices, dans un même plan. Mais le cône K^3_{012} contient les axes de rotation x_{12}, x_{20}, x_{01} et le cône K^3_{123} les axes x_{23}, x_{31}, x_{12}. Les deux cônes ont donc en commun l'axe x_{12}. Cet axe est une droite pour laquelle la seconde et la troisième position, c'est-à-dire celles qui correspondent aux gerbes S_1 et S_2, se confondent; elle ne jouira donc pas, en général, de la propriété d'être dans le même plan pour quatre positions consécutives. La même chose a lieu pour les deux droites imaginaires i_{12}, j_{12} qui sont sur les deux cônes des inflexions; mais la proposition dont il vient d'être question subsiste pour les six autres génératrices d'intersection. Il suit de là que :

Si l'on prend arbitrairement quatre positions S_0, S_1, S_2, S_3 *de la gerbe, il existe, en général, six rayons a pour lesquels* a_0, a_1, a_2, a_3 *sont contenus dans un seul et même plan.*

De même, il existe six plans α de la gerbe S, ayant la propriété de passer par une même droite pour les quatre positions α_0, α_1, α_2, α_3. Ce sont les plans perpendiculaires aux six droites.

Si les positions des gerbes se rapprochent indéfiniment, nous obtiendrons des propositions analogues se rapportant au mouvement continu d'un corps autour d'un point fixe. Nous voyons qu'il existe à chaque instant dans le corps six rayons pour lesquels quatre positions consécutives sont dans le même plan. On pourra, par analogie avec ce qui a été

fait pour les trajectoires de points, les désigner par génératrices d'ondulation des surfaces coniques sur lesquelles elles se trouvent. Un quelconque des six plans, qui sont perpendiculaires sur ces rayons, jouit de la propriété de passer par une même droite pour quatre positions consécutives.

La même chose a lieu pour le mouvement inverse. Si, de plus, α' est l'un des six plans de S', ce sera un plan tangent à la surface trajectoire de l'un des six rayons, et, de même, chacun des six rayons a' est une des droites par lesquelles passe l'un des six plans dans ses quatre positions consécutives.

6. Chaque génératrice x du cône polaire Γ passe par une génératrice de rebroussement de son cône trajectoire au moment où elle devient axe instantané de rotation, et, en général, il n'y aura que les génératrices de la gerbe S, appartenant au cône polaire, qui jouiront de la propriété de décrire des surfaces trajectoires ayant des génératrices de rebroussement.

De même, il est visible que le plan ξ perpendiculaire à x, dans le moment où x est axe instantané de rotation, se trouve être un plan tangent d'inflexion du cône qu'il enveloppe, et, en général, en dehors des plans tangents au cône supplémentaire de Γ, il n'existe pas d'autre plan enveloppant une surface conique qui possède un plan tangent d'inflexion. Ici nous pourrions répéter le raisonnement fait au Chapitre précédent (§ V, 6) pour le mouvement plan.

Il nous suffira de transporter à la géométrie de la gerbe les résultats acquis. Appelons donc ψ et ψ' les angles que les axes de courbure instantanés des cônes polaires forment avec l'axe de rotation, il s'ensuivra immédiatement que :

Si, à un instant quelconque, les axes de courbure des cônes polaires sont du même côté du plan tangent commun, et que la différence ($\psi - \psi'$) *change en même temps de signe, tout rayon des deux gerbes est une génératrice de rebroussement de sa surface trajectoire, et chaque plan des deux gerbes est un plan tangent d'inflexion de la surface conique qu'il enveloppe.*

Enfin, nous pourrons encore énoncer le théorème suivant :

L'enveloppe de tous les cônes d'inflexion de la gerbe S *se compose de deux parties dont la signification géométrique est bien distincte. L'une de ces parties est le cône polaire* Γ, *dont les rayons jouissent de la propriété de décrire des surfaces coniques à génératrices de rebroussement. L'autre est le lieu des rayons de la gerbe dont les surfaces trajectoires ont des génératrices d'ondulation.*

Les théorèmes correspondants s'appliquent à l'enveloppe de tous les cônes de rebroussement.

V. — Les cônes des axes de courbure stationnaires.

1. Soient encore S_0, S_1, S_2, S_3 quatre positions arbitraires de la gerbe S. Soient a_0^m, a_1^m, a_2^m les bissectrices des angles $(a_0 a_1)$, $(a_1 a_2)$, $(a_1 a_3)$, et α_0^ν, α_1^ν, α_2^ν les plans normaux correspondants.

Si ε est un plan quelconque de S, les droites d'intersection des plans α_0^ν, α_1^ν qui correspondent aux rayons a de ε sont sur un cône du second ordre qui contient aussi les axes de rotation x'_{12}, x'_{20}, x'_{10}. De même, les droites d'intersection des plans normaux α_1^ν, α_2^ν forment un cône du second ordre qui renferme x'_{23}, x'_{31}, x'_{12}. Les deux cônes ont en commun l'axe x'_{12}. En général, ils se couperont donc encore suivant trois autres génératrices par chacune desquelles passent trois plans a_0^ν, α_1^ν, α_2^ν.

Le plan ε renferme donc trois rayons a, tels que leurs plans normaux passent par une seule et même droite. L'ensemble de ces droites forme donc un cône du troisième ordre. On désignera cette surface par H_{0123}^3, ou plus brièvement par H_{03}^3. Pour chacun des rayons a de cette surface, a_0, a_1, a_2, a_3 sont sur un même cône de révolution.

Les mêmes conclusions subsistent quant au mouvement de la gerbe S' dans S. Le mouvement inverse comporte donc une surface conique $H_{0123}^{3\prime}$ ou $H_{03}^{3\prime}$, telle que, pour une quelconque de ses génératrices b' les trois plans normaux $\beta_0^{\nu\prime}$, $\beta_1^{\nu\prime}$, $\beta_2^{\nu\prime}$ passent par une seule et même droite, c'est-à-dire telle que b'_0, b'_1, b'_2, b'_3 soient sur un même cône de révolution.

La surface conique $H^{3\prime}_{03}$ n'est autre chose que la surface formée par les axes de courbure des génératrices a de H^3_{03}. En effet, on peut faire voir que l'axe de courbure a' de tout rayon a est sur $H^{3\prime}_{03}$. Cela résulte, d'une part, du théorème donné au § I, 7 de ce Chapitre; d'autre part on peut le voir directement de la manière suivante : comme les droites a_0, a_1, a_2, a_3 sont sur un cône de révolution, l'axe de révolution de ce cône est la droite d'intersection de trois plans normaux $\alpha^\nu_0, \alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2$. Cet axe est relié à a par la condition de former avec a_0, a_1, a_2, a_3 des angles égaux. Cette propriété a lieu, que nous considérions le mouvement de S ou celui de S'.

Donc a'_0, a'_1, a'_2, a'_3 font avec a des angles égaux entre eux, c'est-à-dire que a est l'intersection des plans normaux $\alpha^{\nu\prime}_0, \alpha^{\nu\prime}_1, \alpha^{\nu\prime}_2$. Donc a' est sur $H^{3\prime}_{03}$. De plus, dans le mouvement inverse, a est l'axe de courbure de la surface décrite par a'.

2. Les deux cônes H^3_{03} et $H^{3\prime}_{03}$ sont donc des surfaces correspondantes des gerbes S et S' qui sont liées par une relation quadratique. Chacun de ces cônes contient les génératrices principales de sa gerbe, c'est-à-dire les axes de rotation, car, pour chacun d'eux, deux des quatre positions considérées se confondent. Donc, les axes de rotation x_{12}, x_{20}, x_{01} sont sur H^3_{03}, et les axes du mouvement inverse $x'_{12}, x'_{20}, x'_{01}$ sont sur $H^{3\prime}_{03}$. Nous avions défini les génératrices a de H^3_{03} au moyen des trois faisceaux de plans normaux $\alpha^\nu_0, \alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2$. Il est évident que, pour chacune de ces génératrices, les plans qui correspondent aux angles $(a_0 a_2)$, $(a_0 a_3)$, $(a_1 a_3)$ passent par l'axe a' du cône de révolution envisagé. Ces cônes se comportent absolument de la même façon vis-à-vis des quatre positions S_0, S_1, S_2, S_3, et trois quelconques des six groupes

$$S_0 S_1; \quad S_0 S_2; \quad S_0 S_3; \quad S_1 S_2; \quad S_1 S_3; \quad S_2 S_3$$

peuvent être employés à leur génération. Donc, H^3_{03} contient les six axes de rotation $x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{12}, x_{13}, x_{23}$, et, de même, $H^{3\prime}_{03}$ renferme $x'_{01}, x'_{02}, x'_{03}, x'_{12}, x'_{13}, x'_{23}$.

Nous arrivons par suite au résultat suivant :

Si S_0, S_1, S_2, S_3 *sont quatre positions de la gerbe* S, *choisies à volonté, il existe dans cette gerbe une surface conique du*

troisième ordre H^3_{03} *dont les génératrices* a *sont telles que* a_0, a_1, a_2, a_3 *sont les génératrices d'un même cône de révolution. Cette surface de révolution renferme les six axes de rotation qui correspondent à deux quelconques des quatre gerbes* S_0, S_1, S_2, S_3. *Les axes de révolution forment une surface conique* $H^{3\prime}_{03}$, *située dans* S', *et qui passe par les six axes du mouvement inverse. Lors de l'inversion du mouvement, les deux cônes échangent leur signification.*

Sur ces surfaces coniques se trouvent aussi (§ IV) les six génératrices communes à deux cônes des inflexions successifs.

3. Si les positions des gerbes se rapprochent indéfiniment, les surfaces coniques décrites par le rayon a jouissent de la propriété d'avoir des axes de courbure stationnaires. Tout point du rayon a décrit donc une courbe qui a un contact du troisième ordre avec son cercle osculateur. On démontrera comme au § V, 5 du Chapitre I que chacune des deux surfaces coniques possède une génératrice double qui est l'axe instantané.

Donnons cette fois l'énoncé du théorème en considérant, non pas le rayon a lui-même, mais ses différents points, nous aurons la proposition suivante :

Si un corps invariable se meut autour d'un point fixe, il existe dans ce corps, et à chaque instant; une surface conique du troisième ordre H^3, *dont tous les points sont caractérisés par ce fait que leurs trajectoires ont un contact du troisième ordre avec leur cercle osculateur. Les axes de courbure de ces trajectoires forment une surface conique* $H^{3\prime}$ *située dans* S'. *Lors de l'inversion du mouvement, les deux surfaces coniques échangent leur signification. Chacune des deux surfaces contient l'axe instantané et touche suivant cette droite le cône polaire de son système.*

4. Soient enfin S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 cinq positions de la gerbe S choisies à volonté. Aux quatre positions S_1, S_2, S_3, S_4 correspond un cône H^3_{14} qui est le lieu géométrique des droites pour lesquelles a_1, a_2, a_3, a_4 sont sur un cône de révolution. Les cônes H^3_{03} et H^3_{14} renferment tous les deux les axes de rota-

tion x_{23}, x_{31}, x_{12}. Ils se couperont donc encore, en général, suivant six autres génératrices, et, pour chacune d'elles, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont les génératrices d'un même cône de révolution. Cela n'aura pas lieu, en général, pour les axes x_{23}, x_{31}, x_{12}. Donc :

Si l'on prend arbitrairement cinq positions de la gerbe S, cette gerbe renfermera, en général, six rayons a tels que a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 soient sur un cône de révolution. Les axes de ces cônes sont les rayons analogues dans le mouvement inverse.

De même, lorsqu'un solide invariable tourne d'une manière quelconque autour d'un point fixe, il y aura, en général, six droites telles que leurs points aient un contact du cinquième ordre avec leurs cercles de courbure. Les axes de courbure sont les rayons analogues de S' lors du mouvement inverse.

5. Les recherches faites dans ce paragraphe peuvent être étendues aux surfaces coniques enveloppées par les plans de la gerbe.

Si, par exemple, a est un rayon de H_{03}^3, le plan perpendiculaire à a' est tel que α_0, α_1, α_2, α_3 sont des plans tangents d'un seul et même cône de révolution. Il existe donc un cône h_{03}^3 de troisième classe, cône supplémentaire de H_{03}^3 qui est le lieu géométrique des plans α de la gerbe S. Nous pourrons donc tirer de chacun des théorèmes démontrés plus haut un nouveau théorème, si nous l'étendons aux gerbes polaires des gerbes de rayons S et S'.

On voit donc encore ici que, dans le mouvement d'une gerbe, les rayons et les plans sont soumis à des lois semblables. Nous aurions ainsi pu présenter les considérations faite dans ce Chapitre d'une manière complètement dualistique, en considérant toujours les cônes supplémentaires liés aux gerbes S et S'. Les plans des deux systèmes polaires sont alors également en relation quadratique, et cela de telle façon que deux plans seront correspondants s'ils sont perpendiculaires sur deux rayons correspondants a et a'. Si l'on ne considère les deux systèmes polaires que comme des gerbes de plans, il existera pour eux aussi deux surfaces coniques γ et γ', supplémentaires de Γ et Γ', dont le mouvement relatif détermine le déplacement du système invariable, etc.

Lors du mouvement d'un solide invariable autour d'un point fixe, il existe donc une dualité complète entre les cônes décrits par les rayons, et ceux qu'enveloppent les plans du système. Cela n'avait pas lieu pour le mouvement d'un système plan dans son plan. Tandis que, par exemple, le cercle des inflexions, lieu des points pour lesquels trois positions A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite, est une courbe du *second ordre*, les droites g, pour lesquelles g_0, g_1, g_2 passent par un même point, forment un faisceau du *premier ordre*.

La raison de cette différence réside, comme on le sait, dans la manière différente de déterminer la ponctuelle et le faisceau de rayons. Pour le faisceau de plans, au contraire, le mode de détermination est le même que pour le faisceau de rayons, et c'est à cela qu'il faut ramener la dualité qui se présente dans le déplacement d'un système invariable autour d'un point fixe.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

I. — Le mouvement d'une droite.

1. Un système invariable, que nous considérons comme illimité, se déplace d'une manière déterminée dans l'espace fixe Σ'.

Sa position sera connue à chaque instant, si l'on donne celles de trois points qui déterminent un plan. Car si A_0, B_0, C_0 sont les positions de trois points A, B, C, un quatrième point D ne pourra prendre que des positions telles que : $D_0A_0 = DA$; $D_0B_0 = DB$; $D_0C_0 = DC$, c'est-à-dire, telles que le tétraèdre $A_0B_0C_0D_0$ soit égal au tétraèdre ABCD. Mais une pareille position est unique. Si donc nous savons que trois points non en ligne droite ont atteint les positions qui leur étaient assignées, nous pourrons en dire autant du système lui-même.

Nous nous servirons des mêmes notations que dans les deux Chapitres précédents. A, g, ε, désigneront donc respectivement un point, une droite, un plan de Σ, lorsque leur position dans l'espace Σ' n'interviendra pas dans la question; au contraire, les différentes positions que prend Σ dans Σ' seront encore désignées par Σ_0, Σ_1, ... De même A_0, A_1, ... désigneront les positions correspondantes du point A de Σ, etc.

2. Pendant le mouvement du système, chacun de ses points décrit une courbe qui sera sa trajectoire, chaque droite engendre une surface réglée, chaque plan enveloppe une surface développable, etc.

Pour étudier les propriétés géométriques de ces courbes et de ces surfaces, nous considérerons encore deux positions

arbitraires Σ_0 et Σ_1 du système. Quelle que soit la manière dont elles seront choisies, le plan de l'infini sera toujours un plan uni de Σ_0 et Σ_1. Mais nous excluons de prime abord le cas où les deux systèmes auraient en commun un point ou un plan situés à distance finie. Car, s'ils ont en commun un point à distance finie, on peut les considérer comme étant deux positions d'un système invariable qui tourne autour d'un point fixe; mais ce cas a été étudié au Chapitre précédent. Si les deux systèmes ont en commun un plan à distance finie, ils peuvent être ou congruents, ou symétriquement égaux. Dans le premier cas, nous avons fait voir au Chapitre I que les systèmes plans congruents auront toujours un point uni. Si celui-ci n'est pas à l'infini, nous rentrons dans le cas précédent; si c'est, au contraire, un point à l'infini du plan, il suffira d'une simple translation pour faire passer le plan et, par conséquent, le système Σ de sa position initiale à sa position finale.

Si les deux plans correspondants ε_0 et ε_1 sont symétriquement superposés, désignons par g_0, h_0; g_1, h_1 deux couples quelconques de droites correspondantes des deux plans. Alors la bissectrice de l'angle $(g_0 g_1)$ est parallèle à celle de l'angle $(h_0 h_1)$; à une droite de ε_0 qui est parallèle à la bissectrice, correspondra, comme on le voit aisément, une droite de même direction. Les droites ainsi définies forment, dans ε_0 et ε_1, deux faisceaux de rayons parallèles qui sont symétriquement superposés. Il existe donc forcément une droite située à distance finie qui se correspond à elle-même. Désignons-la par $x_0 = x_1$.

Ces deux droites x_0 et x_1 n'ont, comme point uni, que le point à l'infini, ou bien elles se correspondent point par point [1]. Dans le premier cas, Σ_0 se superpose à Σ_1 après une rotation de 180° autour de x_0. Ce cas rentre donc dans le Chapitre précédent. Dans le second cas, il faut ajouter à cette

---

[1] Un seul point uni O, situé à distance finie, ne peut pas se présenter, car autrement, par une rotation de 180° autour d'une droite perpendiculaire en O sur ε, on pourrait faire coïncider point par point non seulement x_0 avec x_1, mais la perpendiculaire d_0 à x_0 qui passe par O coïnciderait aussi avec d_1. Alors les plans ε_0 et ε_1 seraient superposés point par point.

rotation une translation parallèle à x_0. Nous reviendrons au § IV, 1, sur la signification cinématique de ce cas.

3. Soient maintenant Σ_0 et Σ_1 deux positions quelconques de Σ satisfaisant à la condition énoncée; soient g_0 et g_1 les positions correspondantes d'une droite g; $A_0, B_0, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ les positions des points de g. On désignera encore par $A^m, B^m, \ldots$ les points milieux des cordes A_0A_1, B_0B_1. Soit de plus α^v le plan perpendiculaire en A^m sur la corde A_0A_1. On l'appellera *plan normal* correspondant au point A.

Les plans normaux α^v et β^v des points A et B de g se coupent suivant une droite g^v; sur cette droite prenons arbitrairement les points M et N. Comme ces points sont dans α^v, on a

$$MA_0 = MA_1; \qquad NA_0 = NA_1,$$

et de même, les deux points étant situés dans β^v,

$$MB_0 = MB_1; \qquad NB_0 = NB_1.$$

Mais $A_0B_0 = A_1B_1$, par suite les deux tétraèdres MNA_0B_0 et MNA_1B_1 sont égaux entre eux et peuvent, par une rotation autour de MN, être amenés en coïncidence.

Donc :

Tout déplacement d'une droite peut être obtenu au moyen d'une rotation autour d'une droite g^v de l'espace. Les plans normaux correspondant à tous les points de g se coupent suivant g^v.

Les deux droites g_0 et g_1 ne seront pas, en général, dans un même plan; cependant il peut arriver qu'elles se coupent ou qu'elles soient parallèles entre elles. Dans chacun des trois cas possibles, il existe une droite g^v. Si g_0 et g_1 se coupent, g^v sera de plus perpendiculaire au plan $[g_0 g_1]$.

Si g_0 et g_1 sont parallèles, les cordes relatives aux points A, B, C sont également parallèles; les plans normaux passent tous par une même droite g^v_∞, située à l'infini.

4. Si g_0 et g_1 ne se coupent pas, les cordes relatives aux points A, B, C sont les génératrices d'un paraboloïde, cha-

cune d'elles est dans un plan perpendiculaire à g^{v}. Toutes les génératrices de ce système sont coupées par celles de l'autre suivant des ponctuelles semblables. Donc les points milieux A^m, B^m, C^m, ... sont tous sur une droite. On l'appellera la *médiane* de g_1 et on la désignera par g^m.

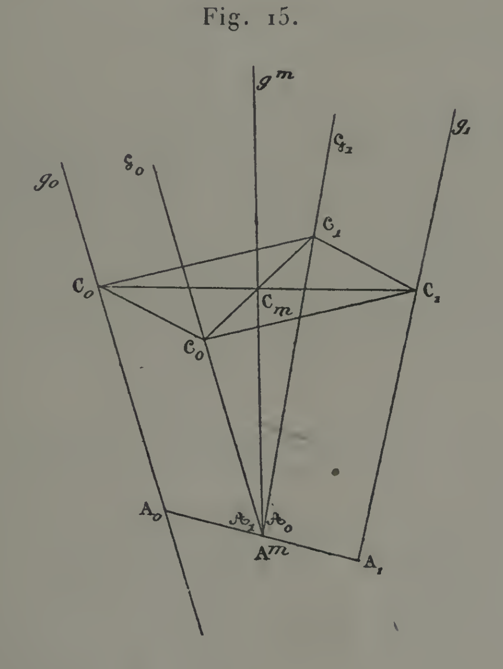
Donc :

Les points milieux des cordes relatives aux points d'une droite sont en ligne droite.

Le théorème précédent a été démontré en supposant que g_0 et g_1 ne se rencontrent pas; mais, comme on l'a fait voir au Chapitre I, il subsiste lorsque g_0 et g_1 se coupent ou lorsque ces droites sont parallèles entre elles.

Dans ces derniers cas, on a montré que les projections de toutes les cordes sur g^m sont égales entre elles, et que

Fig. 15.



$\wedge(g_0 g^m) = \wedge(g_1 g^m)$. On est donc amené à se demander si ces propriétés subsistent dans le cas général. En effet, cela a lieu. Pour le démontrer, menons par A^m les droites $\mathcal{G}_0$ parallèle à g_0, et $\mathcal{G}_1$ parallèle à g_1. Déterminons sur ces droites les séries ponctuelles $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$, ..., $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$, égales à A, B, C, ..., et

telles que $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ coïncident en A_m. Pour tout point C on a

$$C_0\mathcal{C}_0 = A_0\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 A_1 = \mathcal{C}_1 C_1,$$

c'est-à-dire que $C_0\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1 C_1$ est un parallélogramme. Donc C^m est en même temps le milieu de $\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1$, et comme, de plus, $\mathcal{A}_0\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1$, g^m est la bissectrice de l'angle $(g_0 g_1)$, c'est-à-dire que :

La médiane g^m fait des angles égaux avec g_0 et g_1.

La projection de C_0C_1 sur g^m est égale à la projection du contour $C_0\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1 C_1$. Mais, $\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1$ étant perpendiculaire sur g^m, la projection de C_0C_1 est égale à la somme des projections de $C_0\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1 C_1$. Comme $C_0\mathcal{C}_0 = A_0\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{C}_1 C_1 = A_1\mathcal{A}_1$, elle est égale à la projection de A_0A_1.

De là il suit que :

Les projections sur la médiane des cordes relatives à tous les points de g sont égales entre elles.

Si donc une corde est perpendiculaire à g^m, il faut qu'elles le soient toutes. Ce théorème est d'une grande importance. Les médianes qui sont perpendiculaires sur les cordes relatives à leurs points ont une importance exceptionnelle dans la théorie du mouvement d'un système. Nous aurons à nous occuper plus tard tout spécialement de leurs propriétés et de leur distribution dans l'espace.

II. — Le mouvement d'un plan.

1. Soient maintenant ε_0 et ε_1 deux positions correspondantes d'un plan ε du système Σ à trois dimensions ; à chaque point A de ce plan correspond un point A^m, et à chaque droite passant par A une droite g^m passant par un point A^m. Si g et h sont deux droites quelconques de ε, elles auront toujours un point commun à distance finie ou infinie ; il en sera de même pour les droites g^m et h^m. Deux droites de ce système se couperont toujours, et, comme elles ne peuvent passer toutes par le même point, elles seront dans le même plan, c'est-à-dire que :

Les milieux des cordes de tous les points d'un plan ε *sont dans un même plan.*

On désignera ce plan sous le nom de plan *médian* ε^m de ε.

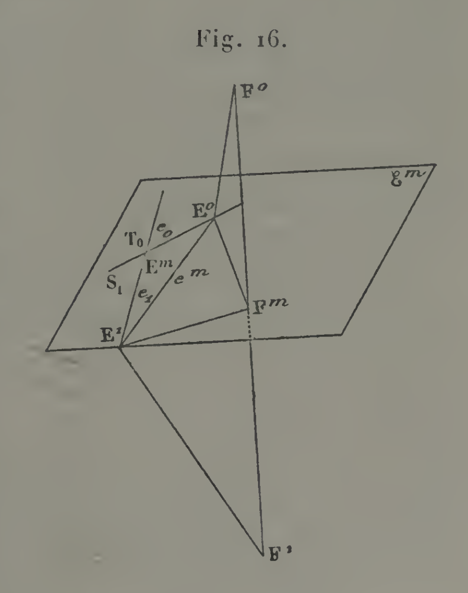
2. A tout point A de ε correspond un plan normal α^v, et à toute droite g, qui passe par A, une droite g^v contenue dans α^v.

A deux droites quelconques g et h de ε correspondent donc deux droites qui se coupent, g^v et h^v. Deux droites, g^v et h^v, choisies arbitrairement, ont un point commun, et, comme elles ne peuvent pas être toutes dans un même plan, elles passeront par le même point E^v. Celui-ci est en même temps le point d'intersection commun aux plans normaux de tous les points de ε. Chacun de ces plans normaux passe par E^v, et le point qui lui correspond dans ε^m.

Les deux droites suivant lesquelles ε_0 et ε_1 sont coupées par ε^m sont deux droites correspondantes e_0 et e_1 des deux plans.

La corde de tout point B_0 de e_0 est, en effet, tout entière dans ε^m; par conséquent, B_1, et par suite e_1, sont aussi dans ε^m.

Fig. 16.



La médiane e^m de e_0 et e_1 rencontre (Chap. I, § I, 3) e_0 et e_1 en deux points correspondants E_0 et E_1. Si, de plus, on désigne par S_1 ou T_0 le point d'intersection de e_0 et e_1, suivant qu'on le considère comme appartenant à l'un ou l'autre système, E_0 se confondra avec S^m et E_1 avec T^m. Donc le plan mené par E_0 perpendiculairement à e_0 est le plan normal σ^v; de même, τ^v passe par E_1 : ce plan est perpendiculaire à e_1. Donc l'intersection de σ^v et τ^v, qui est perpendiculaire sur ε^m, est la droite e^v et le point F^m où e^v rencontre le plan ε^m est, en outre, centre de rotation pour e_0 et e_1.

La droite e^{v} contient, en tout cas, le point E^{v}. Mais ce point ne peut être autre que F^{m}. Car, ainsi qu'on l'a vu plus haut, le plan normal φ^{v} de F^{m} doit passer aussi par E^{v}. Si donc F^{m} et E^{v} étaient distincts, φ^{v} passerait par e^{v}, ce qui est impossible, car seuls les plans normaux des points de e^{m} passent par e^{v}. D'où il suit :

Les plans normaux de tous les points d'un plan ε se coupent en un point E^{v} du plan médian ε^{m}. Les droites g^{v} qui correspondent aux droites g de ε passent également par E^{v}.

Les deux droites suivant lesquelles σ^{v} et τ^{v} coupent les plans ε_0 et ε_1 sont des droites correspondantes dans les deux plans, car l'une d'elles est perpendiculaire sur e_0 en E_0, l'autre sur e_1 en E_1. Nous les désignerons par f_0 et f_1. On peut faire voir que leurs points d'intersection avec e^{v} sont deux points correspondants F_0 et F_1. A cet effet, déterminons la droite f^{v}. Nous savons déjà qu'elle passe par $E^{v}=F^{m}$ et qu'elle est dans le plan normal du point E^{m}, lequel est perpendiculaire sur e^{m}. D'autre part, nous avons vu plus haut que E_0F_0 et E_1F_1 font des angles égaux avec f^{v}; mais aucune droite du plan considéré ne satisfait à cette condition, si ce n'est $E^{m}F^{m}$. Parmi les plans normaux qui passent par f^{v} se trouve donc aussi le plan ε^{m}, et la corde correspondante est perpendiculaire sur ε^{m}. La seule droite satisfaisant à cette condition et qui rencontre f_0 et f_1 est la droite e^{v}; par suite, notre proposition se trouve démontrée. Dans le cas général, il ne peut pas y avoir de second point tel que F^{m}.

Donc :

Dans tout plan ε il existe, en général, un point à distance finie F dont la corde est perpendiculaire sur le plan médian ε^{m}. Le point correspondant F^{m} est le point de ε^{m} où concourent tous les plans normaux des points de ε. Le plan normal de ce point est ε^{m} lui-même.

De l'égalité des triangles $F_0E_0F^{m}$ et $F_1E_1F^{m}$ il suit encore que

$$\wedge(F_0E_0F^{m})=\wedge(F_1E_1F^{m}).$$

Mais ces angles sont ceux que font entre eux les plans ε_0 et ε_1; nous avons donc le théorème suivant :

Les plans ε_0 et ε_1 *font des angles égaux avec le plan médian.*

E_0 et E_1 sont les points des droites e_0 et e_1 où celles-ci sont rencontrées par la médiane e^m.

On désigne cette droite sous le nom de *caractéristique* du plan ε. Elle se signale par deux singularités : d'un côté, elle jouit de cette propriété que les cordes de tous ses points sont dans ε^m; d'autre part, on peut la définir comme étant la seule droite de ε^m qui soit à angle droit sur la droite correspondante e^ν.

3. Les précédents théorèmes nous permettent d'indiquer de quelle manière on peut faire passer le plan ε de sa position initiale à sa position finale. Nous lui imprimerons d'abord un mouvement de rotation autour de e^ν, jusqu'à ce que e_0 coïncide avec e_1. Alors F_0 et F_1 n'auront pas changé de position dans l'espace. Si nous faisons encore tourner le plan autour de e_1 jusqu'à ce qu'il vienne en coïncidence avec ε_1, F_0 viendra dans la position F_1, et, comme trois points non en ligne droite sont maintenant dans leur position finale, on peut en dire autant de tous les points du plan.

L'ordre des deux opérations est interchangeable. Car nous faisons d'abord tourner le plan ε_0 autour de e_0 jusqu'à ce que F_0 arrive en coïncidence avec F_1; e_0 ne changera pas de position dans l'espace. Effectuons maintenant la rotation autour de e^ν; les points e_0 coïncident avec les points correspondants de e_1, et, par conséquent, cela aura lieu pour tous les points de ε_0 et de ε_1.

Il suit de là que :

Tout déplacement d'un plan ε *peut, en général, être obtenu au moyen de deux rotations successives autour de deux droites perpendiculaires l'une sur l'autre. L'ordre des rotations est indifférent. L'une d'elles a lieu autour d'une droite déterminée* e *du plan; c'est celle qui correspond à la caractéristique* e^m *du plan* ε^m; *l'autre rotation se fait autour d'une droite déterminée de l'espace absolu, la droite* e^ν *qui accompagne* e.

On remarquera encore que, quel que soit l'ordre des rotations, on devra toujours entendre par e la même droite de ε. Sa position dans l'espace absolu varie suivant que nous prenons e ou e^{v} comme premier axe de rotation.

L'ordre des rotations étant interchangeable, on peut aussi les faire simultanément.

III. — Le système focal.

1. Les points milieux A^m, B^m, C^m des cordes, correspondant aux points A, B, C du système Σ, sont tels qu'à chaque droite g corresponde une droite g^m, et à chaque plan ε un plan ε^m. L'ensemble de ces points forme donc un système Σ^m en collinéation avec Σ_0 et Σ_1. Observons encore qu'à un point à l'infini de Σ correspond un point à l'infini de Σ^m, et nous aurons le théorème suivant :

Le système Σ^m, formé par les milieux des cordes, est en affinité collinéaire avec les systèmes Σ_0 et Σ_1.

Les plans normaux α^v, β^v, γ^v, qui correspondent aux points A, B, C de Σ, forment un système Σ^v qui, d'après ce qui a été vu au § II, 2, est en situation réciproque avec Σ_0 et Σ_1. Σ^m et Σ^v sont donc aussi des systèmes réciproques. Le point A^m est dans le plan α^v qui lui correspond, et le plan ε^m passe par le point E^v qui est son correspondant. Les deux systèmes ont donc l'un vis-à-vis de l'autre une situation telle, que chaque plan de l'un passe par le point correspondant de l'autre. Deux systèmes qui sont dans une telle liaison forment ce que l'on appelle un *système focal* (¹).

2. La propriété caractéristique d'un pareil système consiste en ce que, à chaque point de l'espace, correspond le même plan, qu'on considère le point comme faisant partie de Σ^m ou de Σ^v, et inversement à tout plan de l'espace correspond doublement le même point. Cela ressort clairement des

(¹) Le système focal fut découvert à peu près en même temps par Chasles et par Möbius (*Lehrbuch der Statik*, § 74). Möbius le désigne sous le nom de *Nullsystem*.

théorèmes démontrés au § II, 2. Car au point E^v de Σ^v correspond dans le système Σ''' le plan ε'''. D'autre part, si l'on considère le point E^v comme étant un point F''' de Σ''', il lui correspondra le plan ε''' dans le système Σ^v.

On peut donc considérer les deux systèmes comme n'en formant qu'un seul, dont les éléments se correspondent réciproquement par couples. Nous appellerons *plan focal* d'un point le plan qui lui correspond, et *foyer* le point qui correspond à un plan.

3. Soit maintenant g''' une droite quelconque de Σ''' et g^v la droite correspondante de Σ^v. Si A''' est un point pris arbitrairement sur g''', son plan normal, c'est-à-dire son plan focal α^v passera par g^v.

Si, de plus, β^v est un plan quelconque passant par g''', son foyer B^v devra se trouver sur g^v.

Considérons maintenant g^v comme faisant partie de Σ''' et désignons alors cette droite par h'''. Appelons aussi D''' le point désigné plus haut par B^v, le plan correspondant δ^v sera, à cause de la double correspondance, identique avec β''', et, comme cela a lieu pour tout point B^v, la droite h^v est identique avec g'''.

Désignons encore le plan α^v par γ''', en le considérant comme faisant partie de Σ'''. C^v est identique avec A''' et se trouve, par conséquent, sur g'''; d'où il suit encore que h^v est la même droite que g'''.

Les droites g''' et g^v se correspondent donc aussi doublement, c'est-à-dire que, si nous considérons g^v comme étant une droite h''' de Σ''', les plans focaux ou normaux de tous ses points se coupent suivant la droite g'''.

Donc :

Deux droites g''' et g^v sont tellement liées l'une à l'autre que chacune d'elles est la droite d'intersection des plans normaux ou plans focaux des points de l'autre.

Deux pareilles droites sont dites *droites conjuguées* du système focal. On peut leur appliquer le théorème suivant, comme il ressort de ce qui vient d'être dit :

Deux droites conjuguées sont telles que chacune d'elles contient les foyers des plans qui passent par l'autre.

La manière dont les espaces réciproques Σ^m et Σ^v sont reliés entre eux est donc, au point de vue géométrique, complètement réciproque.

Toutefois, comme Σ^m et Σ^v jouissent de propriétés cinématiques différentes, nous serons obligés, en général, de séparer les deux parties du système focal, et nous continuerons à indiquer, par le mode de notation, si nous considérons un point de l'espace comme appartenant à Σ^m ou Σ^v.

4. Si la droite g^m est à l'infini, on dira que sa conjuguée g^v est un *diamètre* du système focal. On a ce théorème :

Tous les diamètres du système focal sont parallèles entre eux.

Car, toutes les droites à distance infinie étant dans un plan, tous les diamètres passent par le foyer de ce plan, et sont, par conséquent, parallèles entre eux. Chaque diamètre contient les foyers des plans qui passent par sa conjuguée située à l'infini; il correspond donc à un faisceau de plans parallèles, et on l'appellera *diamètre adjoint* ([1]) à ces plans.

Parmi tous ces diamètres, il en existe un, adjoint au faisceau de plans perpendiculaires sur la direction des diamètres. On l'appelle l'*axe principal* du système focal.

L'axe principal contient donc le foyer de tout plan ξ^m qui lui est perpendiculaire, et, comme le foyer de ξ^m est le point F^m dont la corde est normale sur ξ^m, il s'ensuit que l'axe principal est en même temps la corde de ce point F^m. Les points F_0 et F_1 sont donc aussi situés sur cet axe.

Cela a lieu pour tout plan perpendiculaire à l'axe principal, et il en résulte que cette droite se correspond à elle-même dans les systèmes Σ_0, Σ_1, Σ^m. On la désignera par x_0, x_1, x^m ou par x.

Les deux ponctuelles congruentes qui sont superposées sur l'axe principal n'ont comme élément uni que le point

---

([1]) Cette dénomination fut introduite par Mannheim.

à l'infini. C'est donc le seul point uni, réel, des systèmes Σ_0 et Σ_1.

5. Nous sommes maintenant en état de déterminer la position du foyer pour les plans que nous avons exclus d'abord de nos considérations.

Si ε_0 et ε_1, par exemple, sont parallèles entre eux, c'est-à-dire si la droite de l'infini se correspond à elle-même dans les deux plans, ils seront aussi parallèles à ε^m, et ε^m contient la droite infiniment éloignée $(\varepsilon_0 \varepsilon_1)$. Le foyer est donc l'intersection de ε^m avec le diamètre adjoint.

Si ε_0 et ε_1 doivent avoir une droite double à distance finie, ce ne peut être que l'axe principal. Alors le foyer de ε^m est sur la droite infiniment éloignée conjuguée de x : c'est donc le point à l'infini de ε^m dans la direction normale à x.

Si les deux plans ont en commun un point à l'infini, il faut que ce soit le point à l'infini sur l'axe principal. Donc, chacun des deux plans, et, par suite, ε^m aussi sera parallèle à la direction de cet axe. Le plan ε^m renferme donc une infinité de diamètres du système focal. Son foyer est le point à l'infini par lequel passent toutes les droites de l'infini conjuguées de diamètres.

Enfin, nous remarquerons encore que le foyer du plan de l'infini doit être considéré comme étant à l'infini sur l'axe principal. On peut encore donner une autre signification à ce point.

Le plan de l'infini se déplace sur lui-même pendant le mouvement. Il possède donc un centre de rotation qui est son point double. Ce point double est le point à l'infini sur l'axe principal qui, par suite, peut être considéré comme axe de rotation du plan à l'infini.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des plans normaux des points du système situés à distance finie. Les propriétés du système focal font voir qu'à chaque point de l'infini correspond un plan normal qui est son plan focal. D'où il résulte que le plan normal de tout point à l'infini est parallèle à l'axe principal.

Si le point à l'infini est, en particulier, le point situé sur l'axe principal, on devra considérer le plan de l'infini comme étant son plan normal.

IV. — Le mouvement hélicoïdal et la surface des axes.

1. Avec l'aide des théorèmes développés au numéro précédent, on réussira à trouver le mouvement le plus simple, au moyen duquel on peut faire passer un système à trois dimensions d'une position Σ_0 à une position Σ_1.

Nous considérerons le système dans sa position initiale Σ_0 et nous lui communiquerons un mouvement de translation parallèle à l'axe principal, de telle façon qu'un point quelconque A_0 de celui-ci vienne coïncider avec le correspondant A_1. Alors tout point B_0 coïncidera aussi avec B_1. Cette translation, égale à $A_0 A_1$ en grandeur et en direction, est désignée par $2U$.

Dans cette position, les deux systèmes ont en commun, point par point, l'axe principal. Il suffit, par conséquent, de faire tourner le système Σ d'une certaine quantité autour de x comme axe, pour l'amener dans la position finale. L'angle de rotation sera 2Ω.

On peut intervertir l'ordre des mouvements ; car faisons tourner d'abord le système Σ_0 autour de x_0 comme axe d'un angle 2Ω, et effectuons ensuite la translation $2U$ parallèlement à x_0, Σ_0 aura été amené dans la position Σ_1. Il est donc permis d'effectuer simultanément les deux mouvements. S'ils sont uniformes, il en résultera une hélice dont le pas sera $2\pi U : \Omega$, l'axe étant x. Il suit de là que :

Tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu en obligeant ce système à exécuter un mouvement hélicoïdal déterminé autour d'une certaine droite comme axe. Cet axe est la droite située à distance finie, commune aux positions initiale et finale du système [1].

---

[1] On doit attribuer ce théorème à Giulio Mozzi (1765). (*Voir* GIORGINI, *Memorie di Math. della Soc. ital. delle Scienze.* Modena; 1836). Le même théorème fut retrouvé en 1830 par Chasles (*Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac,* t. XIV, p. 324). Cauchy l'a donné aussi dans ses *Exercices de Mathématiques,* t. II, p. 87 (1827), pour des mouvements infiniment petits (*Œuvres complètes de Cauchy,* 2e série, t. VII; 1889).

Nous désignerons le quotient $U : \Omega$, qui détermine le pas du mouvement hélicoïdal, sous le nom de *paramètre* du mouvement. On voit maintenant que le cas exclu en dernier lieu au § I, 2 de ce Chapitre correspond à un mouvement hélicoïdal de 180° d'amplitude. Dans ce cas, les théorèmes énoncés aux §§ II et III subissent en effet certaines modifications.

2. Nous pourrons obtenir une image tangible de ce mouvement de la façon suivante : nous nous servirons d'une vis dont le pas est $2\pi U : \Omega$, que nous disposerons tellement que son axe coïncide avec la droite x du système. Nous imaginerons maintenant que l'écrou conserve une position fixe dans l'espace, mais que le système soit lié avec la vis. Si nous déplaçons la vis dans son écrou, le système Σ_0 passera progressivement de la position Σ_0 à la position Σ_1. Chaque point de Σ décrit alors une hélice, et toutes ces hélices ont leur axe commun et même pas. Les hélices correspondant à tous les points d'un cylindre de révolution, dont l'axe est x, sont égales entre elles. Elles se rapprochent d'autant plus d'être des courbes planes que le point décrivant sera plus éloigné de l'axe du mouvement hélicoïdal.

Nous avons fait remarquer, au commencement de ce Chapitre, que le déplacement de Σ peut être obtenu, dans certains cas spéciaux, au moyen d'une simple rotation ou d'une simple translation; ces cas peuvent être considérés comme dérivant par dégénérescence du mouvement hélicoïdal. Ce mouvement se transforme en une rotation lorsque $2U$ se réduit à zéro, à une translation, lorsque c'est 2Ω qui est nul. A ce point de vue, il nous sera permis de dire que le théorème principal énoncé dans ce paragraphe est valable pour tout déplacement d'un système invariable.

3. Pour obtenir les lois du mouvement d'un corps, qu'on peut lui appliquer à chaque instant, il nous suffira de prendre Σ_0 et Σ_1 infiniment voisins. Comme A^m est toujours le milieu de $A_0 A_1$, à la limite Σ^m se confondra avec Σ. Mais les théorèmes qui se rapportent à Σ^m sont tout à fait indépendants de la grandeur du déplacement; il nous sera donc

encore permis de nous servir de Σ^m pour déduire, en toute rigueur, de ses propriétés les lois qui caractérisent à chaque instant le mouvement d'un corps rigide. Remarquons que, à la limite, $A_0 A_1$ devient la tangente à la trajectoire de A, et α^{v} le plan normal à cette trajectoire; que maintenant le système focal est formé par Σ et Σ^{v}.

Nous obtiendrons les théorèmes fondamentaux qui suivent :

Si un système invariable se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, il exécute à chaque instant un mouvement hélicoïdal infiniment petit autour d'une droite déterminée de l'espace (¹).

Si un système invariable se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, les points du système formeront à chaque instant avec leurs plans normaux un système focal. L'axe principal est l'axe du mouvement hélicoïdal instantané.

Dans chaque plan du système, il existe à chaque instant un point tel que la tangente à sa trajectoire soit perpendiculaire au plan : ce point est le foyer.

Enfin, en se reportant au dernier théorème énoncé au § I, 4 :

Si un système invariable se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, et si, à un instant quelconque, une droite est perpendiculaire à la tangente à la trajectoire d'un de ses points, elle est perpendiculaire aux tangentes aux trajectoires de tous ses points.

Les éléments de trajectoire de tous les points peuvent donc être regardés à chaque instant comme des éléments d'hélices, qui ont toutes x comme axe, et dont le pas est le même et égal à la valeur actuelle limite de $2\pi : \Omega$. La tangente à la trajectoire de chaque point est identique avec la tangente à l'hélice qui passe par ce point.

4. Mentionnons quelques théorèmes que l'on peut tirer de

(¹) *Voir* la note de la page 94.

la seconde des propositions précédentes et qui nous seront particulièrement utiles par la suite. Nous avons déjà fait observer que la correspondance des éléments qui font partie du système focal est réciproque; mais, eu égard à la signification cinématique différente des systèmes Σ et Σ^ν, nous continuerons à faire une distinction entre les éléments de l'espace, suivant que nous les considérerons comme appartenant à Σ ou Σ^ν. Nous aurons donc les théorèmes suivants :

Si g et g^ν sont deux droites conjuguées du système focal, les plans normaux de tous les points de g se couperont suivant g^ν, et les plans normaux des points de g^ν passeront par g.

C'est-à-dire que, si nous regardons g^ν comme étant une droite h de Σ, la droite h^ν correspondant à h sera précisément g, et les foyers de tous les plans passant par g^ν sont sur g.

Si les droites g passent par un même point, les droites conjuguées sont toutes dans un même plan qui est le plan normal de ce point; et si les droites g sont dans un plan ε, les droites conjuguées passent toutes par le foyer de ce plan, c'est-à-dire par le point dont le plan normal est ε.

Si, en particulier, les droites g sont parallèles, les droites g^ν seront dans un plan parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal, et, si les droites g sont dans un plan parallèle à cet axe, les droites g^ν sont parallèles entre elles.

Soit enfin ε un plan quelconque de Σ, et E^ν son foyer; les plans normaux des trajectoires de tous les points de ε se coupent en E^ν; de plus ε est le plan normal de E^ν, c'est-à-dire que, si E^ν, considéré comme point de ε, est désigné par F, son plan normal φ^ν est identique avec ε.

5. Pour nous représenter le mouvement continu d'un système invariable, nous commencerons par considérer autant de positions du système que nous voudrons, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$. La droite qui se correspond à elle-même dans les deux positions Σ_0 et Σ_1 est $x_0 = x_1$; $y_1 = y_2$ sera celle qui résulte de la considération des systèmes Σ_1 et Σ_2; $z_2 = z_3$ sera commune à Σ_2 et Σ_3, etc.

Nous désignerons maintenant par Σ' l'espace fixe dans lequel a lieu le mouvement, et par x', y', z' les droites de ce

système autour desquelles se font les déplacements hélicoïdaux. Le mouvement hélicoïdal autour de x' amène y en y' et Σ de la position initiale Σ_0 dans la position Σ_1. Le mouvement hélicoïdal qui commence maintenant autour de y' fait passer z en z', et Σ dans la position Σ_2, etc. Nous obtenons ainsi un système bien défini de droites de Σ qui deviendront, au cours du mouvement, les axes du mouvement hélicoïdal, et un système de droites $x', y', z', \ldots$ de Σ_1 qui représentent la suite des positions des axes dans l'espace fixe.

On désignera l'ensemble des premières droites par (R), et le système des secondes par (R'). Elles définissent complètement le mouvement du système. Soient X et Y les pieds de la perpendiculaire commune à x et y; X' et Y' les points analogues sur x' et y'. Comme, par suite du premier déplacement hélicoïdal, y vient coïncider avec y', on a $XY = X'Y'$ et

$$\wedge(xy) = \wedge(x'y').$$

Appelons plan central du système (R) pour le rayon x le plan mené par cette droite et la perpendiculaire commune à x et y, et faisons la convention analogue pour le système Σ'; soient de plus X et X' les points centraux sur x et x', il s'ensuivra :

Le mouvement de l'espace Σ par rapport à l'espace Σ' s'effectue de telle façon que, par suite de la rotation 2Ω, les plans centraux viennent en coïncidence, et que les points centraux coïncident par suite de la translation 2 U.

La rotation 2Ω est donc égale à l'angle de deux plans centraux correspondants des systèmes (R) et (R'), et la translation 2U est égale à la distance de deux points centraux correspondants.

6. Considérons un mouvement continu quelconque du système Σ, il arrivera que non seulement les positions $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ se rapprocheront indéfiniment, mais qu'il en sera de même pour les droites $x, y, z, \ldots x', y', z', \ldots$.

En tous cas, nous ne considérerons par la suite que des mouvements pour lesquels cela a lieu. Dans ce cas, les systèmes (R) et (R') formeront deux surfaces réglées R et R'.

Pour deux génératrices infiniment voisines, xy ou $x'y'$, les

deux égalités obtenues plus haut subsistent. Et, comme il est permis de regarder les distances infiniment petites des génératrices correspondantes comme égales pour les deux surfaces, on pourra remplacer les deux égalités par la seule suivante :

$$\frac{XY}{\wedge(xy)} = \frac{X'Y'}{\wedge(x'y')}.$$

Mais, dans une surface réglée, on appelle le rapport qui existe entre la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et leur angle le paramètre de la surface pour la génératrice correspondante. Il s'ensuit donc que, pour R et R', deux génératrices correspondantes, c'est-à-dire telles qu'elles viennent se superposer au cours du mouvement, ont des paramètres égaux.

Si g est une génératrice quelconque d'une surface réglée, il y a deux plans tangents particulièrement remarquables parmi tous ceux que l'on peut faire passer par g; ce sont d'abord celui qui est tangent à la surface à l'infini, puis celui qui est perpendiculaire au premier. Le point de contact du second est dit point central de g, et le plan lui-même prend le nom de *plan central*. Les plans et les points que nous avons désignés plus haut sous le nom de plans centraux et points centraux des systèmes (R) et (R') deviennent, à la limite, les plans centraux et les points centraux des surfaces R et R'.

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

Les surfaces réglées R et R' *ont, à chaque instant, une génératrice commune pour laquelle le point central, le plan central et le paramètre sont les mêmes.*

On peut aussi dire que les deux surfaces ont, à chaque instant, deux génératrices consécutives communes.

Maintenant nous pourrons encore nous représenter le mouvement du système Σ de la manière suivante : nous avons déjà vu qu'il est formé de mouvements hélicoïdaux infiniment petits autour des génératrices x', y', z', ... de la surface R'. Pendant la rotation autour de x', x se confond avec cette droite, le mouvement fait coïncider y avec y', et maintenant les surfaces R et R' ont en commun les génératrices x, y et x', y'. Ensuite le mouvement hélicoïdal se fera

autour de y'; x et x' se séparent, tandis que z et z' arrivent en coïncidence, etc... Le système Σ tourne alors autour de chaque axe pendant qu'il glisse en même temps le long de cette droite. C'est pourquoi on a dit que le mouvement de Σ ou de R par rapport à R' est un roulement accompagné d'un glissement. Nous sommes donc arrivé à cet important résultat que :

Le mouvement le plus général d'un système invariable à trois dimensions consiste en un roulement accompagné d'un glissement d'une surface réglée R *appartenant au système, sur une surface* R' *appartenant à l'espace absolu. Les deux surfaces ont même paramètre pour les deux génératrices qui coïncident au cours du mouvement* (¹).

7. Comme les plans centraux sont perpendiculaires aux plans tangents à l'infini, sur chaque génératrice, les surfaces elles-mêmes sont tangentes en ce point, c'est-à-dire que les courbes r_∞^{v} et $r_\infty^{\mathrm{v}'}$, suivant lesquelles R et R' sont coupées par le plan de l'infini, sont, à chaque instant, tangentes au point à l'infini sur l'axe du mouvement hélicoïdal.

Mais nous avons vu que ce point peut être considéré comme le centre instantané de rotation du plan à l'infini. Le plan à l'infini se déplace donc de telle façon que les courbes r_∞ et r'_∞ roulent l'une sur l'autre. Les surfaces R et R' caractérisent le mouvement du système; en les donnant, on s'impose en même temps la nature du mouvement. On les désignera sous le nom de *surfaces polaires* ou *surfaces des axes*.

Elles remplissent, dans le mouvement dans l'espace, le même rôle que les courbes polaires dans le mouvement plan et que les cônes polaires dans le mouvement autour d'un point fixe. Cependant, tandis qu'on peut se donner d'une manière complètement arbitraire les courbes polaires et les cônes polaires, le choix des surfaces R et R' n'est pas abso-

---

(¹) Ce théorème est dû à Poncelet. *Voir* RESAL, *Cinématique pure*, p. VI et VII; BOUR, *Cinématique*, p. 138, et MANNHEIM, *Géométrie descriptive*, 2ᵉ éd., p. 360.

L'existence de cette surface fut énoncée par Cauchy dans le Mémoire cité page 94. Bour indiqua ses propriétés (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 29, p. 36).

lument libre, car il faut que le paramètre de distribution soit le même le long de deux génératrices correspondantes.

De là il suit que les deux surfaces réglées seront à la fois soit des surfaces réglées ou des surfaces développables, ou des cylindres.

Si elles sont toutes les deux cylindriques, elles ne déterminent pas le mouvement du système d'une manière univoque. La raison en est la suivante : le pas du mouvement hélicoïdal dépend du rapport entre l'angle des plans centraux et la distance des points centraux. Mais la distance des points centraux devient indéterminée dans le cas des surfaces cylindriques; donc le pas du mouvement hélicoïdal peut prendre n'importe quelle valeur.

8. Jusqu'ici nous avons toujours considéré comme immobile l'espace Σ' dans lequel a lieu le mouvement de Σ. Mais imaginons un observateur qui soit solidaire du système mobile; il verra l'espace Σ' se mouvoir par rapport à lui. On désignera encore ce mouvement de Σ' dans Σ, sous le nom de mouvement *inverse*, pendant que le mouvement de Σ dans Σ' sera le mouvement *direct* ou *primaire*.

Comme le caractère des deux mouvements est indépendant de notre propre position, soit dans Σ, soit dans Σ', il s'ensuit que pour les deux mouvements, direct ou inverse, on aura à chaque instant des mouvements hélicoïdaux coïncidants tant pour la position de l'axe que pour la valeur du pas. Il s'ensuit ainsi que le mouvement de l'espace Σ' consiste dans un roulement accompagné d'un glissement de la surface R' sur la surface R.

De même que chaque point A de Σ décrit une trajectoire située dans Σ', inversement, chaque point B' de Σ' décrit une trajectoire située dans Σ. Nous arriverons plus tard à établir certaines relations réciproques qui ont lieu pour les trajectoires de certains groupes de points de Σ et Σ'. Ici nous nous bornerons à énoncer un théorème important pour nos recherches ultérieures.

Les notations seront celles qui ont été employées dans les deux Chapitres précédents, et nous considérerons d'abord deux positions quelconques du système Σ_0 et Σ_1.

Si B'_0 est un point du plan normal α^{v}, B'_0 est à égale distance de A_0 et A_1. Donc B'_0 et B'_1 sont aussi à égale distance de A_0, et le plan normal $\beta^{\text{v}\prime}$ passe par A. Donc :

Si le plan normal α^{v} *d'un point* A *de* Σ *passe par un point* B^1 *de* Σ^1, *le plan normal* $\beta^{\text{v}\prime}$ *du mouvement inverse passe par* A.

De même, pour le mouvement continu :

Si le plan normal à la trajectoire d'un point A *de* Σ *passe par un point* B′ *de* Σ' *dans le mouvement inverse, le plan normal à la trajectoire de* B′ *passera par* A [1].

V. — Le complexe linéaire.

1. L'existence d'un système focal à chaque instant du mouvement d'un système à trois dimensions doit être considérée comme fournissant le moyen de développer sans difficulté la théorie du mouvement de ce système. Dans ce numéro, nous apprendrons à connaître de nouvelles et importantes propriétés du système focal.

A partir de maintenant, d'ailleurs, nous nous bornerons à considérer des positions infiniment voisines du système; ce n'est qu'exceptionnellement que nous reviendrons à la considération des systèmes Σ_0, Σ_1 et du système correspondant Σ^m.

2. Deux droites conjuguées quelconques g et g^{v} du système focal ne se rencontrent pas, ou bien alors elles coïncident. Car, si g est une droite quelconque, un plan ε passant par cette droite aura son foyer E^{v} sur g^{v}. Si donc E^{v} n'est pas sur g, les deux droites ne se rencontrent pas. Mais, si E^{v} est sur g, E^{v}, considéré comme point F de Σ, est tel que la tangente à sa trajectoire est perpendiculaire sur ε, et, par conséquent, aussi sur g.

Donc g est perpendiculaire aux trajectoires de tous ses

---

[1] *Voir* SCHŒNFLIES, *Comptes rendus,* juillet 1885.

points (IV, 3), les plans normaux $\alpha^{\vee}$ de tous ses points A passent par g, et cette droite coïncide avec sa conjuguée $g^{\vee}$.

Une droite de Σ qui est perpendiculaire aux trajectoires de tous ses points coïncide avec sa conjuguée dans le système focal et réciproquement.

Dans tout plan ε, il existe donc une infinité de droites qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées; elles forment un faisceau dont le centre est le foyer de ε.

Si, de plus, A est un point quelconque, et qu'on veuille chercher les droites de cette espèce qui passent par A, nous remarquerons que chacune d'elles est normale à la trajectoire du point A; elles sont donc dans le plan normal à la trajectoire de ce point, et toute droite de $\alpha^{\vee}$ qui passe par A est à elle-même sa conjuguée.

D'où il suit que :

L'ensemble des droites du système Σ, qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées, forme à chaque instant un complexe linéaire.

Comme chaque droite de ce complexe est située dans le plan normal de chacun de ses points, elle est normale à la trajectoire de tous ses points. Nous l'appellerons *rayon normal* ou plus brièvement *normale*, et nous désignerons dorénavant par l une droite de cette espèce.

3. *Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées g et $g^{\vee}$ appartient au complexe linéaire.*

Désignons, en effet (par anticipation), une pareille droite par l. Le plan normal du point (gl) passe par (gl) et par $g^{\vee}$. De même, le plan normal de $(g^{\vee}l)$ passe par $(g^{\vee}l)$ et par g. Par conséquent, la droite d'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite conjuguée de l, se confond avec l.

A l'aide de ce théorème, on peut faire voir que deux couples de droites conjuguées, par exemple, $[g, g^{\vee}]$ et $[h, h^{\vee}]$, sont toujours sur un hyperboloïde. Car si l est une droite quelconque qui rencontre g, $g^{\vee}$ et h, elle est à elle-même sa conjuguée, et, comme l et h ont un point commun, il faut que les droites l et $h^{\vee}$ conjuguées de l et h se rencontrent aussi.

Donc g, g^{v}, h et h^{v} sont bien rencontrées par la même droite.

4. Faisons passer par g un plan α parallèle à g^{v}, et par g^{v} un plan β parallèle à g. Les deux plans sont parallèles entre eux. Le foyer du plan passant par g est son point d'intersection avec g^{v}; il est donc à l'infini, et, comme le plan normal de tout point à l'infini est parallèle à l'axe instantané du mouvement hélicoïdal, le plan α est parallèle à x. La même chose a lieu pour le plan β mené par g^{v}. Construisons maintenant la perpendiculaire commune à g et g^{v}, elle est perpendiculaire aux deux plans, et rencontre par suite la droite de l'infini qui est perpendiculaire à x. Mais elle est en même temps un rayon l d'un complexe linéaire, et coupe la conjuguée de cette droite de l'infini, c'est-à-dire l'axe x.

Donc :

La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées g et g^{v} rencontre l'axe instantané et lui est perpendiculaire. Un plan qui est parallèle à deux droites conjuguées est aussi parallèle à l'axe.

Imaginons donc un plan quelconque perpendiculaire à x; il rencontrera deux droites conjuguées g et g^{v} de telle façon que les trois points d'intersection avec g, g^{v} et x soient sur une même droite.

En démontrant les théorèmes précédents, nous ne nous sommes à vrai dire occupés que du système focal formé par Σ et Σ^{v}; mais il est visible que ces propriétés subsistent d'une manière analogue pour le système focal formé par Σ^{m} et Σ^{v}. Nous aurons plus tard à faire usage de cette remarque.

5. Le mouvement continu d'un système à trois dimensions devra être considéré comme déterminé à chaque instant, si nous connaissons le système focal qui caractérise l'instant considéré du mouvement. Le système focal instantané et le complexe linéaire qui lui est associé sont déterminés par la connaissance de deux couples de droites conjuguées.

Pour le démontrer, montrons que l'on peut construire l'axe

du mouvement hélicoïdal et le plan normal de chaque point au moyen de deux couples de droites conjuguées. Soient g, $g^\vee$ et h, $h^\vee$ ces droites. Déterminons les perpendiculaires communes à g et $g^\vee$, d'une part, à h et $h^\vee$ de l'autre. La perpendiculaire commune à ces deux droites sera l'axe instantané du mouvement hélicoïdal.

Si, de plus, nous voulons construire le plan normal $\alpha^\vee$ d'un point A, nous mènerons par A deux droites dont l'une rencontre à la fois h et $h^\vee$, l'autre g et $g^\vee$; chacune de ces droites est normale à la trajectoire du point A, comme étant un rayon du complexe. Donc elles déterminent le plan normal $\alpha^\vee$ de A.

Nous pouvons construire d'une manière analogue le foyer de tout plan ε, c'est-à-dire le point dont ce plan est le plan normal. Nous joindrons entre eux les points où ε rencontre g et $g^\vee$; de même les points d'intersection avec h et $h^\vee$. Les droites ainsi obtenues appartiennent au complexe, et leur point d'intersection est le foyer du plan.

6. Le système focal et le complexe linéaire sont également déterminés quand on donne cinq rayons de ce complexe. Soient l, m, n, p, q ces rayons. Tout rayon du complexe qui rencontre une droite g rencontre aussi sa conjuguée. Si nous déterminons les deux droites qui sont rencontrées à la fois par l, m, n, p, ce seront deux droites conjuguées g et $g^\vee$; de même, les deux droites rencontrées à la fois par m, n, p, q seront deux droites conjuguées. Les deux couples déterminent le système focal. Ce cas est donc ramené au précédent.

Il peut arriver que le couple des droites g et $g^\vee$ ne soit pas réel. On peut obtenir alors un couple de droites conjuguées de la manière suivante. Considérons le système réglé auquel appartiennent l, m, q. Si a est une droite quelconque de l'autre système, et qui, par suite, coupe l, m, p, $a^\vee$ appartiendra aussi au premier système. Mais de là il suit que toute droite du système l, m, q appartient au complexe linéaire. La même chose a lieu pour le système de génératrices déterminé par n, p, q.

Maintenant traçons une droite g qui rencontre chacun des

systèmes en deux points réels; g sera une droite réelle rencontrée par quatre rayons du complexe; donc elle formera avec g^v un couple de rayons conjugués du système focal.

De là il suit que nous pourrons toujours construire deux couples réels de droites conjuguées $[g, g^v]$, $[h, h^v]$ lorsque cinq rayons du complexe linéaire seront donnés. On pourra alors, au moyen de ces couples de droites, effectuer les constructions comme il a été dit plus haut.

VI. — Les surfaces engendrées par les droites et les plans du système.

1. De même que chaque point du système parcourt une trajectoire, de même chaque plan engendre une surface développable. La ligne de contact du plan et de son enveloppe s'appelle, comme on le sait, sa *caractéristique :* c'est la droite d'intersection de deux plans consécutifs.

Pour développer les propriétés des caractéristiques, commençons par revenir aux systèmes Σ_0, Σ_1, Σ^m. Nous voyons que la droite e^m du plan ε^m est celle qui deviendra à la limite la caractéristique du plan ε; c'est la raison pour laquelle nous lui avons déjà donné ce nom plus haut (II, 2). Nous avons démontré que les cordes de tous les points de e^m sont dans le plan ε^m lui-même, que e^m et e^v se coupent à angle droit, et que e^m est coupée par e_0 et e_1 en deux points homologues E_0 et E_1.

Le point E^m, qui leur correspond, est le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer $E^v = F^m$ sur e^m. De là il suit que e^m est elle-même la corde d'un de ses points, à savoir, de celui qui est le pied de la perpendiculaire abaissée sur elle du foyer de ε^m. En passant à la limite :

La caractéristique d'un plan jouit de la propriété que les tangentes aux trajectoires de ses points sont toutes dans ce plan. La caractéristique elle-même est tangente à la trajectoire d'un de ses points, à savoir, de celui qui est le pied de la perpendiculaire abaissée sur elle du foyer. La caractéristique et la droite qui lui est conjuguée sont à angle droit l'une sur l'autre.

2. La caractéristique est la seule droite d'un plan ε pour laquelle les tangentes aux trajectoires de ses points soient dans ce plan. Car ε^m ne renferme qu'un couple de droites correspondantes e_0 et e_1. Donc, en dehors de sa caractéristique, ε ne contient aucune autre droite telle que sa conjuguée lui soit perpendiculaire.

Si donc d et $d^\nu = e$ sont deux droites conjuguées qui se coupent à angle droit, et si par d nous faisons passer un plan δ normal à e, il s'ensuivra immédiatement que d est la caractéristique de δ. Le point E où δ est coupé par e est son foyer, car tout plan passant par d a son foyer sur la droite e.

Si maintenant par e nous faisons également passer un plan ε normal à d, il s'ensuivra de même que e sera sa caractéristique, et que le point D, où il rencontre d, est son foyer. Les plans δ et ε se coupent suivant une droite qui passe par E et qui est perpendiculaire sur d et e.

Donc d est tangente à la trajectoire de D, et e est tangente à la trajectoire de E. Il s'ensuit :

Si d et e sont deux droites conjuguées dont les directions sont à angle droit l'une sur l'autre, chacune d'elles sera la caractéristique du plan mené par cette droite perpendiculairement à l'autre. Chacune de ces deux droites rencontre le plan passant par l'autre qui lui est perpendiculaire au foyer de ce plan, et elle est tangente à la trajectoire de ce point.

Comme D et E sont les points de ces deux droites qui sont les plus rapprochés l'un de l'autre, on peut dire :

Si d et e sont deux droites conjuguées dont les directions sont rectangulaires, chacune d'elles sera tangente à la trajectoire de celui de ses points qui est à la distance minimum de l'autre.

On a démontré plus haut que la droite qui joint les deux points D et E rencontre à angle droit l'axe du mouvement hélicoïdal. Le foyer d'un plan quelconque est donc toujours sur la droite qui passe par son intersection avec l'axe et fait un angle droit avec celui-ci.

3. Soient encore g et g^ν deux droites conjuguées quel-

conques du système focal. Nous construirons la perpendiculaire au plan ε qui s'appuie sur g et $g^{\vee}$: ce sera un rayon l du complexe linéaire. Soit L son point d'intersection avec ε; L sera un point de la caractéristique e de ε. Car, l étant normal à ε, la tangente à la trajectoire de L est dans ε; c'est-à-dire que :

Si l'on projette deux droites conjuguées sur un plan quelconque, leurs projections se couperont en un point de la caractéristique de ce plan.

Considérons en particulier le cas où l'une des deux droites conjuguées $g^{\vee}$ est perpendiculaire sur ε, alors toute perpendiculaire à ε qui rencontre g doit être considérée comme une droite l du complexe, car toutes ces droites passent par le point à l'infini sur $g^{\vee}$. Donc la projection de g sur ε est la caractéristique du plan, et il s'ensuit que :

Si g est une droite dont la conjuguée est perpendiculaire sur le plan ε, la projection de g sur ε sera la caractéristique de ce plan.

Si la droite $g^{\vee}$ s'éloigne à l'infini, g devient un diamètre, et, comme tous les diamètres sont parallèles à x, il s'ensuit que :

La caractéristique de tout plan est parallèle à la projection sur ce plan de l'axe instantané.

Comme toutes les droites $g^{\vee}$ perpendiculaires sur ε passent par un seul et même point à l'infini, leurs conjuguées seront dans un plan, celui qui est perpendiculaire sur ε, et passe par la caractéristique de ε. L'une de ces droites est e elle-même. Et, en effet, nous savons déjà que e est conjuguée de la droite perpendiculaire à ε qui passe par le foyer. De plus, il existe parmi elles une infinité de diamètres : ce sont les conjuguées de droites rejetées à l'infini et perpendiculaires sur ε. D'après la nomenclature indiquée plus haut (III, 4), on peut aussi les nommer *diamètres adjoints aux plans perpendiculaires sur* ε. Il s'ensuit que :

La projection d'un diamètre quelconque, adjoint à un plan perpendiculaire sur ε, est la caractéristique de ε.

Si, par la caractéristique d'un plan ε, on mène un plan perpendiculaire au premier, il contiendra tous les diamètres adjoints aux plans perpendiculaires sur ε.

Si η est un plan parallèle à l'axe instantané x, sa caractéristique peut encore être obtenue plus simplement; car, la droite conjuguée de x étant la droite de l'infini perpendiculaire sur x, l'axe lui-même est la droite adjointe à un plan perpendiculaire sur η, c'est-à-dire que la caractéristique d'un plan η, qui est parallèle à l'axe du déplacement instantané, est la projection de cet axe sur η.

4. En dehors des trajectoires décrites par les points et des surfaces développables engendrées par les plans, nous considérerons encore les surfaces réglées décrites par les différentes droites du système.

Pour établir rigoureusement leurs propriétés, nous reviendrons au cas de déplacements finis. Soient donc Σ_0 et Σ_1 deux positions données arbitrairement du système à trois dimensions; les systèmes adjoints Σ^m et Σ^ν forment un système focal auquel on peut appliquer tous les théorèmes obtenus au paragraphe précédent.

Nous conviendrons expressément, pour l'instant, que les droites g_0 et g_1, qui représentent une même droite g dans deux positions différentes du système, ne se rencontrent pas. Si, de plus, A, B, ... sont des points de g, le plan passant par g^m, la corde A_0A_1 se confondra avec le plan tangent en A à la surface engendrée par g, lorsque le déplacement deviendra infiniment petit. En même temps, la normale en A^m à ce plan deviendra la normale à la surface en A.

Nous pourrons construire ces normales de la manière suivante :

Par g^m faisons passer un plan quelconque α, qui coupera g^ν en A^ν. A^ν sera le foyer de ce plan. Si de A^ν nous abaissons la perpendiculaire $A^\nu B^m$ sur g^m, ce sera une droite du complexe linéaire. La corde B_0B_1 du point B^m est donc perpendiculaire sur l^m; et, inversement, l^m est normal au plan passant par g^m et B_0B_1.

Donc, pour obtenir l'ensemble des droites qui deviennent à la limite des normales à la surface engendrée par g, il nous faudra abaisser des différents points de g^{v} des perpendiculaires sur g^m. Elles formeront un paraboloïde équilatère. Chacune de ces génératrices est parallèle aux plans perpendiculaires sur g^m, et comme, de plus, elle appartient au complexe, elle rencontre aussi le diamètre u^m adjoint à ces plans. En passant à la limite :

Les normales à la surface réglée engendrée par une droite du système forment à chaque instant un paraboloïde hyperbolique équilatère qui contient la droite g^{v}, conjuguée de g, et les diamètres u, adjoints aux plans perpendiculaires sur g.

5. D'après cela, si A est un point quelconque de g et que, par A et u, nous fassions passer un plan $[\mathrm{A}\,u]$, il contiendra la normale à la surface au point A. Le plan tangent à la surface au point A est donc le plan mené par g perpendiculairement sur $[\mathrm{A}\,u]$.

Cela va nous permettre de déterminer immédiatement le plan central et le point central sur g. Désignons par G_∞ le point à l'infini sur g, le plan central est parallèle au plan $[u\mathrm{G}_\infty]$, c'est-à-dire que c'est le plan mené par g parallèlement à u. Mais ce plan est aussi parallèle à g^{v}. Il s'ensuit que :

Le plan central de la surface engendrée par g est, à chaque instant, parallèle à la droite conjuguée de g et à l'axe du déplacement.

Comme le plan central est parallèle à x, nous obtiendrons sa caractéristique en projetant x sur ce plan. Le point où g coupe la caractéristique est le point pour lequel la tangente à la trajectoire est dans le plan central lui-même, c'est-à-dire qu'il est le point central de g. Donc :

Le point central de la surface engendrée par g est le pied de la perpendiculaire commune à cette droite et à l'axe du déplacement.

6. Nous avons expressément supposé jusqu'ici que g_0 et

g_1 ne se coupent pas; mais le cas contraire peut arriver. Alors la droite mobile décrit à l'instant considéré un élément de surface développable. Dans ce cas, les définitions données plus haut du point central et du plan central perdent leur signification; mais nous conviendrons d'appeler toujours *point central* celui qui est à la plus courte distance de la droite conjuguée, et, par suite, de l'axe du déplacement.

Comme le fait voir le théorème démontré en dernier lieu, c'est une définition qui est valable pour toutes les droites du système.

Soient d_0 et d_1 deux droites de Σ_0 et Σ_1 qui se coupent. Elles seront aussi coupées par leur médiane; les trois droites sont dans un plan qui, considéré comme faisant partie de Σ^m, sera désigné par δ^m. Comme δ^m contient d^m, δ_0 passera par d_0 et δ_1 par d_1; il s'ensuit que d^m est la caractéristique du plan δ^m. En passant à la limite, la droite d deviendra la caractéristique du plan δ, et, par conséquent, la tangente à la trajectoire d'un point D, et nous pourrons conclure de là que le point central d'une pareille droite est le point pour lequel la tangente à la trajectoire est la droite elle-même.

Si l'on sait qu'une droite d'un système décrit une surface développable, elle fait à chaque instant partie de cette classe de droites d. Le point que nous venons de désigner sous le nom de *point central* est, dans ce cas, le point de contact avec l'arête de rebroussement de la surface développable.

7. Aux théorèmes précédents nous ajouterons quelques constructions élémentaires qui en découlent.

Nous définirons encore le mouvement au moyen de deux couples de droites conjuguées $|g\,g^{\nu}|$ et $|h\,h^{\nu}|$.

Pour trouver la caractéristique d'un plan, il nous suffira de projeter g, g^{ν}, h et h^{ν} sur ε, de déterminer les points d'intersection de ces couples de droites et de les joindre entre eux.

Si A est un point d'une droite g et qu'il s'agisse de construire la normale à la surface décrite par g, nous ferons passer par A un plan perpendiculaire à g; nous déterminerons le foyer de ce plan de la manière qui a été indiquée, et nous le joindrons au point A. Cette ligne de jonction est la normale cherchée.

S'il s'agit de déterminer le point central sur la droite g, nous construirons les plans normaux de deux points quelconques de g; ils se coupent suivant g^{v}, et la perpendiculaire à g et g^{v} rencontre g au point central.

VII. — Le complexe des tangentes aux trajectoires.

1. Toute corde A_0A_1 réunit deux points correspondants de Σ_0 et Σ_1.

Leur ensemble forme, par conséquent, un complexe tétraédral de rayons dérivant des espaces congruents Σ_0 et Σ_1.

Ce fait subsiste pour des positions infiniment voisines du système. Donc :

L'ensemble des tangentes aux trajectoires des points appartenant à un système à trois dimensions constitue à chaque instant un complexe tétraédral de rayons $\mathfrak{S}^{(2)}$.

Ce complexe est identique avec l'ensemble des caractéristiques de tous les plans du système ou avec l'ensemble des droites qui décrivent à l'instant considéré des éléments de surfaces développables. Car nous avons démontré (V, 2) que toute tangente d à la trajectoire d'un point D est, en même temps, la caractéristique d'un plan δ_1 et jouit de cette propriété que d_0 et d_1 sont dans un même plan.

Le tétraèdre fondamental du complexe formé par Σ_0 et Σ_1 se réduit à l'axe du déplacement correspondant et à la droite de l'infini qui lui est perpendiculaire. Car ce sont les seules droites qui soient communes aux systèmes Σ_0 et Σ_1. La même chose a lieu pour le complexe des tangentes aux trajectoires. On peut donc s'attendre à rencontrer dans l'étude de ce complexe des formes géométriques d'espèce toute particulière.

Chaque instant du mouvement est complètement déterminé par le mouvement hélicoïdal instantané; la nature du complexe $\mathfrak{S}^{(2)}$ ne dépendra donc que de lui. Dans les recherches qui vont suivre, nous aurons encore recours, quand cela sera nécessaire, à des positions arbitraires Σ_0 et Σ_1 du système.

2. Si d_0 est une droite qui est coupée par la droite correspondante d_1, la médiane d^m sera la caractéristique du plan

$\delta^m = [d_0 d_1]$ de Σ^m. Il en résulte (I, 3, Chap. I) que les cordes de tous les points de d_0 enveloppent une parabole qui a d^m pour tangente au sommet et le foyer du plan comme foyer. Si nous passons à des positions infiniment voisines Σ_0 et Σ_1, il s'ensuivra que :

Les tangentes aux trajectoires qui sont situées dans un plan quelconque δ enveloppent à chaque instant une parabole qui admet comme tangente au sommet la caractéristique du plan et comme foyer le foyer du plan.

On peut encore énoncer ce théorème de la façon suivante :

Si d est une droite quelconque du complexe $\mathfrak{S}^{(2)}$, les tangentes aux trajectoires de d enveloppent une parabole qui admet cette droite comme tangente au sommet et dont le foyer est au foyer du plan qui a d pour caractéristique.

3. Si g_0 est une droite de Σ qui ne rencontre pas la droite correspondante g_1, les cordes correspondantes seront les génératrices d'un paraboloïde. Celui-ci contient aussi la médiane g^m. Si G^m et G^v sont les pieds de la perpendiculaire commune à g^m et g^v et que l^m soit la droite de jonction de ces points, l^m sera un rayon du complexe linéaire qui est adjoint au système focal formé par Σ^m et Σ^v. Elle sera donc perpendiculaire sur la corde G_0G_1 passant par G_1^m, et, comme elle est perpendiculaire sur g^m, il s'ensuit qu'elle sera normale au paraboloïde au point G^m.

Toute corde appartenant au paraboloïde est dans un plan perpendiculaire à g^v. Nous pouvons donc prendre comme plan directeur de ces génératrices le plan passant par l^m et perpendiculaire sur g^v.

Le plan directeur du second système de génératrices est parallèle aux droites g_0 et g_1. Nous ferons passer un plan par l^m et g^m et le considérerons comme un plan δ^m de Σ^m. Comme l^m est perpendiculaire sur l'axe du mouvement hélicoïdal, la caractéristique d^m de δ^m sera perpendiculaire à l^m et, par conséquent, parallèle à g^m. Mais δ^m renferme aussi d_0 et d_1, et, comme Σ_0, Σ_1, Σ^m sont des systèmes en affinité col-

linéaire, d_0 sera parallèle à g_0 et d_1 parallèle à g_1, c'est-à-dire que δ''' est le plan directeur du second système de génératrices.

Les deux plans directeurs se coupent suivant l'''. Or on vient de démontrer que cette droite est la normale au paraboloïde au point G'''. Donc elle est l'axe principal et G''' est le sommet du paraboloïde. Passons à la limite et observons que G''' devient le point central sur g, il s'ensuivra :

Les tangentes aux trajectoires de tous les points d'une droite g qui n'appartient pas au complexe $\Theta^{(2)}$, forment, à chaque instant, l'un des systèmes de génératrices d'un paraboloïde. Ce paraboloïde a pour sommet le point central et pour axe la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe du déplacement. Le plan directeur des tangentes aux trajectoires est perpendiculaire à la droite conjuguée g^{v}.

4. Chaque droite g est l'axe d'un faisceau de plans. Les deux faisceaux correspondants de Σ_0 et Σ_1, dont les axes sont g_0 et g_1, déterminent en général des droites appartenant à l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde. L'intersection de deux plans homologues ε_0 et ε_1 des deux faisceaux est une génératrice; à la limite, ce sera la caractéristique du plan ε.

A l'aide des théorèmes établis plus haut au sujet des caractéristiques, il nous sera possible de reconnaître directement la nature spéciale de l'hyperboloïde sans avoir recours à la considération de deux systèmes Σ_0 et Σ_1.

Nous conviendrons d'abord que la droite n'appartient pas au complexe des tangentes. Si e est encore la caractéristique d'un plan ε du faisceau, le plan η passant par e et perpendiculaire sur ε renfermera tous les diamètres du système focal qui sont adjoints aux plans perpendiculaires à ε (V, 3). Par conséquent, il contiendra certainement le diamètre u adjoint aux plans perpendiculaires sur g. Mais cela est vrai pour tout plan du faisceau g; c'est-à-dire que les plans η qui sont menés par les caractéristiques des plans ε perpendiculairement à ces plans passent tous par une même droite u. Toute caractéristique est donc l'intersection de deux plans

perpendiculaires l'un sur l'autre passant l'un par u, l'autre par g.

On peut démontrer que deux faisceaux de plans dont les éléments correspondants sont perpendiculaires l'un sur l'autre sont projectifs. Cela a déjà été fait pour le cas particulier où les axes des faisceaux se coupent (Chap. II, I).

Nous pourrions en déduire le théorème général, mais nous préférons en donner une démonstration directe. Soit ε_g un plan quelconque passant par g. Par g nous faisons passer un second faisceau de plans ε'_g tel que ε'_g soit perpendiculaire sur ε_g. Les deux faisceaux seront égaux. Un plan quelconque α normal à g coupe le faisceau des plans ε'_g suivant le faisceau de rayons e'_g et le faisceau de plans ε_u passant par u suivant les rayons e_u. Mais ε'_g est toujours parallèle à e_u, donc e'_g est aussi parallèle à e_u. Ces deux faisceaux de rayons sont donc en situation perspective avec une même ponctuelle située à l'infini. Donc les faisceaux ε_u et ε'_g ainsi que ε_u et ε_g seront projectifs. Pour tenir compte de ce que l'hyperboloïde considéré peut être engendré par deux faisceaux projectifs dont les plans correspondants sont perpendiculaires l'un sur l'autre, on l'appellera *hyperboloïde orthogonal*.

On pourra donc dire que :

Les caractéristiques de tous les plans qui passent par une droite quelconque g du système à trois dimensions forment en général, à chaque instant, les génératrices d'un hyperboloïde orthogonal. On peut engendrer cette surface au moyen de deux faisceaux de plans dont les plans correspondants sont perpendiculaires l'un sur l'autre. L'un d'entre eux a g pour axe, pendant que l'axe de l'autre est le diamètre u adjoint aux plans perpendiculaires à g [1].

5. De même que le cône orthogonal (Chap. II, I), l'hyperboloïde orthogonal jouit aussi de la propriété d'avoir ses sections circulaires perpendiculaires à deux génératrices qui sont les droites g et u. Le plan α normal à g que l'on vient

---

[1] *Sur l'hyperboloïde orthogonal,* voir les Mémoires cités à la p. 56.

de considérer coupe, en effet, le plan ε_g suivant un rayon e_g perpendiculaire à e'_g, et, comme e'_g est parallèle à e_u, e_u et e_g sont aussi perpendiculaires l'un sur l'autre. Leur point d'intersection est un point de l'hyperboloïde. Maintenant e_g passe toujours par le point (εg) et e_u toujours par (εu). Par conséquent, la courbe d'intersection du plan α avec l'hyperboloïde est un cercle, (εg) et (εu) étant les extrémités d'un diamètre. Le fait analogue se produit pour les plans normaux à u. Donc :

L'hyperboloïde orthogonal est coupé suivant un cercle par tout plan perpendiculaire à g ou à u.

Pour tout plan du faisceau, on obtient la caractéristique en projetant sur lui le diamètre u. Nous considérerons deux plans particuliers, le plan μ parallèle à x et le plan ν qui est perpendiculaire à celui-ci. La caractéristique m du plan μ est parallèle à u, et la caractéristique n du plan ν est parallèle à g. Donc les plans $[gm]$, $[nu]$ sont parallèles. D'ailleurs, les deux plans sont des plans tangents à l'hyperboloïde aux points (gm) et (nu).

Soit alors l la perpendiculaire commune à g et à x. Comme elle est dans un plan perpendiculaire à g, elle rencontre la droite de l'infini de ce plan, et, comme c'est une droite du complexe linéaire, elle rencontre aussi la conjuguée de cette droite de l'infini, c'est-à-dire le diamètre u. Les points (gm) et (nu) sont donc tous les deux sur l; donc l est un axe principal de l'hyperboloïde, celui qui est parallèle aux plans des sections circulaires. Donc :

La perpendiculaire commune à g et à u est un axe principal de l'hyperboloïde, celui qui est parallèle aux plans des sections circulaires.

L'un des sommets situés sur cet axe principal se confond donc avec le point central de g.

6. Quand l'axe g du faisceau de plans est à angle droit sur l'axe de déplacement, l'hyperboloïde se transforme en un paraboloïde équilatère; car la caractéristique d'un plan est

parallèle à la projection de l'axe du déplacement. Donc les caractéristiques de tous les plans du faisceau sont perpendiculaires sur g. Le sommet du paraboloïde est encore le point central sur g. Inversement, il est visible que si, dans un faisceau de plans, la caractéristique d'un plan est perpendiculaire sur l'axe g, g et x doivent être à angle droit, et alors les caractéristiques de tous les plans sont perpendiculaires sur g. Comme cela a lieu à tout instant du mouvement, nous obtiendrons incidemment le théorème suivant :

Si un faisceau de plans se déplace de telle façon que la caractéristique d'un plan soit toujours perpendiculaire à l'axe du faisceau, cela aura lieu pour les caractéristiques de tous les plans du faisceau.

7. Si l'axe du faisceau appartient au complexe des tangentes, lequel cas a été exclu jusqu'ici, l'hyperboloïde se réduit à un cône orthogonal. Désignons, en effet, une pareille droite par d, et soit D le point à la trajectoire duquel elle est tangente. D sera le foyer du plan qui est perpendiculaire à d. Donc le diamètre u adjoint à ce plan passe également par D. Les droites d et u se couperont, et les faisceaux de plans dont elles sont les axes, engendreront un cône orthogonal dont le sommet sera en D.

Tout plan qui passe par d a en commun deux droites avec ce cône : d et sa caractéristique. De là il suit que le plan qui a d comme caractéristique, touche le cône suivant d. Mais tout plan passant par u coupe également le cône suivant une seconde génératrice, à l'exception de celui qui est perpendiculaire au plan principal que déterminent d et u. Ce plan est donc tangent au cône le long de u ; il contient d'ailleurs l'axe du déplacement.

Donc :

Si une droite d est tangente à la trajectoire d'un point D, *les caractéristiques de tous les plans que l'on peut faire passer par cette droite forment à chaque instant un cône orthogonal. Les axes des faisceaux orthogonaux qui l'engendrent sont d et le diamètre u adjoint aux plans perpendiculaires sur d. Le sommet du cône est le point* D. *Le plan dont la ca-*

ractéristique est d le touche le long de cette droite, et le plan tangent suivant u contient l'axe du déplacement.

On peut donner aussi ce théorème sous la forme suivante :

Toutes les droites du complexe $\mathfrak{S}^{(2)}$ *qui passent par un point quelconque* D *forment un cône orthogonal. Les axes des faisceaux orthogonaux qui l'engendrent sont la tangente d à la trajectoire de* D *et le diamètre adjoint aux plans perpendiculaires à d.*

Si enfin la droite v est un diamètre, tout plan mené par v est parallèle à x, et sa caractéristique est, par conséquent, la projection de x sur ce plan. Chacune des caractéristiques est l'intersection de deux plans rectangulaires passant par les droites parallèles x et v. L'ensemble de ces droites forme donc un cylindre de révolution ayant le plan $[vx]$ pour plan diamétral.

8. Toute droite du système à trois dimensions décrit une surface réglée. Sur chacune d'elles se trouve à chaque instant un point remarquable, le point central. C'est (VI, 5) le pied de la perpendiculaire commune à la droite et à l'axe du déplacement.

Nous nous proposons de déterminer la surface lieu des points centraux de toutes les droites d'une gerbe de rayons.

Soit D le centre de la gerbe, et u le diamètre passant par ce point. Considérons le faisceau de plans dont l'axe est u. Soit μ un plan quelconque de ce faisceau. Il coupera la gerbe de rayons suivant un faisceau dont le centre est en D. Comme μ est parallèle à x, le point central d'une droite quelconque de ce faisceau est l'intersection de cette droite avec la projection m de x sur μ. Mais m est la caractéristique du plan μ. Donc toutes ces droites m sont sur un cylindre de révolution, comme il vient d'être démontré.

Par suite :

Les points centraux des surfaces décrites par les droites

passant par un point D *sont à chaque instant sur un cylindre de révolution qui contient l'axe du déplacement instantané et qui a pour diamètre la distance du point* D *à cet axe.*

Parmi les droites passant par le point D, on soumettra à une étude spéciale celles qui appartiennent au complexe du second ordre $\mathfrak{C}^{(2)}$.

Chacune d'elles est tangente à la trajectoire de son point central. On peut donc définir les points centraux de ces droites comme étant les points du système pour lesquels les tangentes aux trajectoires sont dirigées sur un même point.

Les droites du complexe $\mathfrak{C}^{(2)}$ qui passent par D forment un cône orthogonal ; leurs points centraux sont donc à l'intersection du cylindre avec ce cône. Mais les deux surfaces renferment le diamètre passant par D ; elles ont donc encore en commun une courbe gauche du troisième ordre c^3. Le plan $[xu]$ est un plan diamétral du cylindre, tandis qu'il est tangent au cône orthogonal suivant u. Les deux surfaces se coupent donc orthogonalement le long de leur génératrice commune.

Il s'ensuit que :

Tous les points du système Σ, *pour lesquels les tangentes aux trajectoires sont dirigées sur un point fixe* D *de l'espace, sont à chaque instant sur une courbe gauche du troisième ordre* c^3. *Celle-ci résulte de l'intersection d'un cône orthogonal et d'un cylindre de révolution qui ont en commun le diamètre* u *passant par* D *et se coupent orthogonalement le long de ce diamètre. Le plan qui touche le cylindre suivant* u *est un plan diamétral du cône, et le plan qui touche le cône suivant* u *est un plan diamétral du cylindre.*

9. Tout plan normal à l'axe instantané coupe le cylindre suivant un cercle, et, comme u est l'une des deux génératrices du cône sur lesquelles les sections circulaires sont perpendiculaires, il coupera aussi le cône suivant un cercle. Les deux cercles passent par le même point de u, mais il n'y a que les autres points d'intersection qui appartiennent à la courbe c^3. Deux d'entre eux sont les points circulaires de

l'infini, communs aux plans perpendiculaires sur x. Ceux-ci sont donc sur c^3, et il s'ensuit que :

La courbe gauche c^3 contient les points circulaires de l'infini appartenant aux plans perpendiculaires sur l'axe du déplacement.

Le point réel que c^3 a en commun avec le plan de l'infini est le point X_∞ à l'infini sur l'axe du déplacement. Comme droite du cylindre de révolution, x est une corde de c^3. Mais le plan $[xu]$ est un plan tangent au cône orthogonal; par conséquent, l'axe x ne peut être rencontré par aucune génératrice du cône en dehors de u. Il n'y aura donc pas d'autre point de c^3 sur x, qui sera, par conséquent, asymptote à la courbe.

Nous obtiendrons le plan osculateur en un point P de c^3, en déterminant sa tangente et en menant, par cette droite, le plan tangent au cône projetant c^3 de P comme centre. Le plan asymptote est donc celui qui contient l'asymptote et touche le cylindre de révolution.

Donc :

L'axe du déplacement est l'asymptote du cercle cubique; son plan asymptote est perpendiculaire au plan qui passe par D *et par l'axe.*

10. Tout plan α perpendiculaire à x rencontre le cône orthogonal suivant un cercle et une génératrice a en un point A_α.

Si d est la tangente à la trajectoire du point D, la droite $D_\alpha U_\alpha$ est le diamètre de ce cercle. Faisons se correspondre deux points A_α, B_α du cercle dont la ligne de jonction est perpendiculaire sur le diamètre $D_\alpha U_\alpha$. Tous ces couples de points forment une involution dont le centre est le point à l'infini de la droite perpendiculaire sur $D_\alpha U_\alpha$. Les points doubles de cette involution sont D_α et U_α.

Par suite, les génératrices a et b du cône orthogonal font partie aussi d'une involution de rayons, et cela de telle façon que u et d soient les rayons doubles. Comme le cône est en situation perspective avec la courbe gauche c^3, il dé-

terminera sur elle une involution de points qui aura comme points doubles D et le point à l'infini X_∞. On désignera deux points conjugués sous le nom de *points conjugués du cercle cubique*. Mais l'axe instantané x est une tangente de c^3 ; par conséquent, l'involution de points est projetée de x par un faisceau de plans en involution. Les plans doubles sont le plan diamétral $[xu]$ et le plan qui lui est perpendiculaire. Par conséquent, deux plans conjugués feront des angles égaux avec le plan diamétral.

Ainsi deux points conjugués A et B du cercle cubique c^3 jouissent de cette propriété que les plans qu'ils déterminent avec x sont également inclinés sur le plan $[xu]$. Nous savons que les génératrices a et b du cône, sur lesquelles sont situées A et B, sont également inclinées sur le plan $[du]$ et, par suite, aussi sur le plan qui lui est perpendiculaire $[xu]$. Nous en pouvons donc conclure que les points A et B sont également distants de D.

Appelons $[xu]$ le *plan principal* et soit D le *sommet* du cercle cubique :

Deux points conjugués du cercle cubique sont à égale distance du sommet, et les plans qu'ils déterminent avec l'axe du déplacement sont également inclinés sur le plan principal.

Ces théorèmes donnent une image tangible de la position du cercle cubique sur le cylindre.

11. Le cône orthogonal est projeté des deux rayons conjugués a et b par deux faisceaux congruents de plans (II, 1, 4). La même chose a lieu pour les points du cercle cubique.

Prenons les deux points conjugués A et B pour centres de gerbes, et considérons c^3 comme résultant de l'intersection de ces gerbes. Nous aurons ainsi rapporté projectivement ces deux gerbes l'une à l'autre. Les rayons a et b, qui se coupent au point D, sont des rayons correspondants des deux gerbes.

Par suite, les deux faisceaux congruents de plans suivant lesquels c^3 est projeté de a et de b sont des faisceaux corres-

pondants des deux gerbes. Les droites u_a et u_b des deux gerbes, parallèles à l'axe du déplacement, sont deux droites correspondantes, car elles passent par X_∞, et l'on peut projeter les génératrices du cylindre au moyen de faisceaux congruents de plans passant par ces droites. On pourra donc le faire aussi pour les points de c^3.

Les deux gerbes jouissent donc de cette propriété que deux faisceaux de plans de l'une sont congruents aux faisceaux de plans correspondants de l'autre. Elles sont donc congruentes elles-mêmes, comme il est facile de le voir.

Donc :

Le cercle cubique est projeté de deux points conjugués par deux gerbes congruentes de rayons.

De là découle cette conséquence que le cercle cubique est projeté de chacun de ses points par un cône orthogonal.

12. Nous avons vu que le cercle cubique est le lieu des points centraux pour les droites passant par D qui appartiennent au complexe des tangentes. Ces droites sont les rayons e de la gerbe qui décrivent momentanément des éléments de surfaces développables. Pour chacun d'eux, les droites infiniment voisines e_0 et e_1 se coupent. Le cercle cubique résulte donc aussi de l'intersection de deux gerbes D_0 et D_1.

Chacune de ses sécantes est alors la caractéristique d'un plan de la gerbe D. Il s'ensuit que :

Les caractéristiques de tous les plans qui passent par un point quelconque D *de l'espace sont, à chaque instant, les sécantes d'un cercle cubique qui a* D *pour sommet.*

Comme le cercle cubique est projeté de deux points conjugués par des gerbes congruentes, il nous est permis d'en déduire que les théorèmes précédents subsistent sous une forme analogue pour des positions quelconques Σ_0 et Σ_1 des systèmes. Nous sommes donc ici en état de déduire de théorèmes obtenus dans le cas d'un déplacement

infiniment petit des théorèmes applicables au déplacement fini.

Soient alors A_0 et A_1 les centres de deux gerbes correspondantes de Σ_0 et Σ_1; déterminons l'axe du mouvement hélicoïdal, et construisons le cylindre qui passe par x, A_0 et A_1. Le plan diamétral de ce cylindre, qui contient x, est le plan principal du cercle cubique. Si X_0 et X_1 sont les pieds des perpendiculaires abaissées de A_0 et A_1 sur x, $A^m X^m$ passera par le sommet D du cercle cubique. Ainsi le cône orthogonal qui a D pour sommet est déterminé.

13. Aux points du système à trois dimensions pour lesquels les tangentes sont dirigées vers un point D correspondent par voie de dualité les plans qui ont leurs caractéristiques dans un même plan ε. Aux caractéristiques des plans passant par D correspondent les tangentes aux trajectoires de tous les points de ε. Pour étudier ces formes géométriques, il sera rationnel de partir encore de deux positions arbitraires du système, Σ_0 et Σ_1.

Soient donc ε_0 et ε_1 les positions successives d'un plan ε de Σ, les cordes de tous les points de ε forment un système de rayons S^3 du troisième ordre et de la première classe, et lorsque ε_0 et ε_1 se rapprochent indéfiniment, chacune des cordes deviendra la tangente à la trajectoire d'un point de ε. De plus, ε_0 et ε_1 engendrent un faisceau de plans du troisième ordre, E^3, qui contient le plan de l'infini. Les rayons de S^3, c'est-à-dire les cordes $A_0 A_1$, sont les axes de ce faisceau de plans. Celui-ci est identique avec l'ensemble des plans osculateurs à une parabole cubique. Lorsque le déplacement devient infiniment petit, chacun des plans se transforme en l'un des plans dont les caractéristiques sont dans ε. Dans ce qui suit, on étudiera les propriétés spéciales du faisceau de plans E^3 et du système de rayons qui en dépend.

Chaque plan de E^3 passe par deux droites correspondantes de ε_0 et ε_1. Le plan médian renferme les droites homologues e_0 et e_1 suivant lesquelles il coupe ε_0 et ε_1. Il s'ensuit donc, en premier lieu, que ε^m appartient au faisceau de plans E^3.

De plus, tout plan α de E^3 est coupé par l'ensemble des plans suivant une parabole; car, le plan de l'infini étant un

des plans de E^3, la section conique, située dans α, a pour tangente la droite de l'infini.

14. Soient maintenant X_0, X_1, X^m les points d'intersection de l'axe du mouvement avec ε_0, ε_1, ε^m. Considérons sur ε_0, ε_1, ε^m les faisceaux de rayons dont les centres sont X_0, X_1 et X^m.

On voit facilement (Démonstration, XI, 6) que les trois droites n_0, n_1, n^m perpendiculaires sur l'axe du déplacement sont des rayons correspondants des faisceaux; et il en est de même pour les droites p_0, p_1, p^m, qui leur sont perpendiculaires, c'est-à-dire pour les projections de x sur ε_0, ε_1, ε^m.

Les cordes, c'est-à-dire les rayons du système S^3, qui unissent les points correspondants de p_0 et p_1 forment un paraboloïde $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ (VII, 3) qui renferme la droite p^m et dont le sommet est au point $(xp^m) = X^m$. L'axe principal du paraboloïde est la droite n^m, et les plans directeurs sont les plans $[xn^m]$ et $[p^m n^m] = \varepsilon^m$.

Il y a dans tout plan α de E^3 une des génératrices du système auquel appartiennent p_0, p_1 et p^m : c'est la droite p_α qui correspond à p_0 et p_1. Toutes les droites p_α sont coupées par les cordes qui forment l'autre système de génératrices suivant des ponctuelles semblables, et sur deux droites p_α et p_β qui font des angles égaux avec le plan directeur $[xn^m]$ les ponctuelles sont même congruentes. On sait que la droite de l'infini du plan ε^m est coupée par tous les couples p_α, p_β suivant une involution de points dont les points doubles sont à l'infini sur p^m et n^m. Mais les génératrices p_α du paraboloïde projettent cette involution de telle manière sur x, que les points doubles seront X^m et le point à l'infini X_∞ sur x. Deux points conjugués quelconques sont donc également distants de X^m. Par suite :

Deux génératrices du paraboloïde $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ qui sont coupées par les cordes suivant deux ponctuelles congruentes sont également inclinées sur le plan $[xn^m]$ et rencontrent l'axe du déplacement en deux points dont le milieu est X^m.

Le paraboloïde $\mathfrak{P}_n^{(2)}$, qui est engendré par les ponctuelles congruentes n_0 et n_1, a également le point X^m pour sommet. Tout plan α de E^3 contient la génératrice n_α du système réglé

dont font partie n_0 et n_1. Comme n_0 et n_1 sont perpendiculaires sur x, le paraboloïde est équilatère, et toute génératrice n_α est perpendiculaire sur x. Le plan directeur des cordes situées sur $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ est $[xp^m]$. On peut donc appliquer à deux génératrices du système n_α, qui sont coupées par les autres cordes suivant des ponctuelles congruentes, les mêmes conclusions qu'aux génératrices analogues p_α et p_β de $\mathfrak{P}_{(p)}^{(2)}$, c'est-à-dire que :

Deux génératrices du paraboloïde $\mathfrak{P}_n^{(2)}$, qui sont rencontrées par les cordes suivant des ponctuelles congruentes, sont perpendiculaires sur l'axe du déplacement, le coupent en deux points également distants de X^m, et font des angles égaux avec le plan $[xp^m]$.

15. Le système de génératrices p_α de $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ et le système n_α de $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ sont tous les deux perspectifs à la ponctuelle X_α. Donc les deux faisceaux de plans qui, de x, projettent les deux systèmes de génératrices sont projectifs. Mais ces faisceaux de plans sont dans cette situation particulière que trois des plans de l'un,

$$[xp_0], \qquad [xp_1], \qquad [xp^m],$$

sont perpendiculaires sur les plans correspondants de l'autre,

$$[xn_0], \qquad [xn_1], \qquad [xn^m].$$

Donc deux plans correspondants quelconques sont perpendiculaires l'un sur l'autre; p_α est perpendiculaire sur n_α et p_β sur n_β.

Donc les angles (xp_α) et (xp_β) sont les angles des plans α et β avec x, c'est-à-dire que :

Deux plans de E^3 qui coupent l'axe du déplacement en deux points également distants de X^m font avec cet axe des angles égaux. Les projections de l'axe sur les plans du faisceau sont des rayons correspondants de tous les plans.

Comme toutes les droites p_α sont parallèles au plan ε^m et que p^m est la projection de x sur ε^m, il s'ensuit encore que ε^m

est le plan qui fait le plus petit angle avec x. Il ne peut donc y avoir aucun plan réel de E^3 qui contienne x; c'est-à-dire que x est un axe impropre du faisceau de plans.

Observons encore que p_α et p_β, de même que n_α et n_β, sont rencontrés par les rayons de S^3 suivant des ponctuelles congruentes.

Il s'ensuit que :

Deux plans de E^3 *qui font des angles égaux avec l'axe du déplacement sont coupés par les rayons du système* S^3 *suivant des systèmes plans congruents.*

L'axe du déplacement a une position particulière par rapport au faisceau de plans E^3. Nous le nommerons l'*axe principal* de ce faisceau. De même ε^m sera appelé le *plan principal*. On peut aussi définir l'axe principal d'une manière tout à fait géométrique comme étant la ligne de jonction des deux points correspondants qui sont les plus rapprochés l'un de l'autre, et le plan principal sera le plan qui fait avec l'axe principal le plus petit angle. Nous avons déjà vu que les plans de E^3 déterminent sur x une involution de points, dont les points doubles sont X^m et X_∞. Cette remarque donne encore naissance au théorème suivant :

Faisons correspondre deux à deux les plans de E^3 *qui sont rencontrés par les cordes suivant des systèmes congruents; tous ces couples formeront une involution dont les éléments doubles seront le plan principal* ε^m *et le plan de l'infini. Toute corde* A_0A_1 *est coupée par eux suivant une involution de points dont les points doubles sont* A^m *et le point à l'infini* A_∞.

En nous basant sur les théorèmes précédents, il ne nous sera pas difficile de nous procurer une image tangible de la distribution des plans de E^3.

Car, si X_α et X_β sont deux points également distants de X^m, les plans qui passent par ces points sont déterminés par la condition que d'abord ils doivent faire des angles égaux avec x, et que, en second lieu, les projections de x sur α et β sont également inclinées sur le plan $[xp^m]$, c'est-à-dire

sur le plan mené par x perpendiculairement sur ε^m. De plus, ε^m fait le plus petit angle avec x, et les angles des plans α avec x augmentent d'une façon continue plus X_α s'éloigne de X^m. Le plan de l'infini doit être considéré comme étant le plus incliné, et perpendiculaire sur l'axe du déplacement.

Les plans de E^3 sont deux à deux symétriquement situés par rapport aux plans $[xp^m]$ et ε^m; c'est pourquoi nous nommerons E^3 le faisceau symétrique de plans de troisième ordre.

16. Nous commençons maintenant l'étude du système de rayons formé par les cordes A_0A_1. Dans la suite, nous désignerons la corde A_0A_1 par s_a. Soient s_a et s_b deux quelconques des cordes qui sont également inclinées sur l'axe du déplacement. Les plans ε_0, ε_1, α, β de E^3 déterminent sur elles des séries de points $A_0, A_1, A_\alpha, A_\beta$, et $B_0, B_1, B_\alpha, B_\beta$. Du caractère géométrique du mouvement hélicoïdal, il ressort que les projections sur x de A_0A_1 et B_0B_1 sont égales entre elles et égales à X_0X_1. Mais α et β sont des systèmes plans congruents pour lesquels x est l'axe du déplacement : donc les projections de $A_\alpha A_\beta$, $B_\alpha B_\beta$ sont égales entre elles et égales à $\overline{X_\alpha X_\beta}$.

Si maintenant nous observons que toute corde s_a est coupée par les couples de plans α, β en deux points conjugués d'une involution, qui a A_m et A_∞ comme points doubles, et que s_a et s_b font des angles égaux avec x, il s'ensuit que les ponctuelles déterminées par les plans du faisceau E^3 sur s_a et s_b sont congruentes, c'est-à-dire que :

Toutes les cordes du système de rayons qui font le même angle avec l'axe principal, sont rencontrées suivant des ponctuelles congruentes par les plans du faisceau E^3.

Nous pourrons nous servir de ce théorème pour représenter simplement sur une gerbe de rayons le faisceau de plans et le système de rayons qui lui correspond.

Par chaque point de l'espace, il passe, en général, trois rayons s_a. Cela a donc lieu aussi pour tout point situé à l'infini P_∞. Comme ε_∞ est un plan de E^3, deux de ces rayons sont dans ε_∞. Il n'y a donc qu'une corde située à distance finie

passant par P_∞, c'est-à-dire parallèle à une direction donnée.

Par un point quelconque O' de l'espace, faisons maintenant passer une gerbe de rayons s'_a; chaque corde s_a aura sa parallèle dans s'_a, et inversement. Si nous faisons abstraction des rayons situés dans ε_∞, il s'ensuit que le système de rayons S^3 pourra être représenté d'une manière univoque par la gerbe de rayons, de telle façon qu'à chaque rayon s_a corresponde le rayon s'_a de la gerbe, qui lui est parallèle, et inversement.

On peut aller plus loin encore. La projection du segment A_0A^m sur x est, en effet, pour toute corde s_a, égale au segment X_0X^m.

Rapportons alors la ponctuelle suivant laquelle chaque corde s_a est coupée par les plans $\alpha, \beta, \ldots$ sur le rayon correspondant s'_a, de façon qu'au point A^m vienne correspondre le point O' et, par conséquent, au point X^m de x le point O' de x'. Alors à tous les points $A_\alpha, B_\alpha, \ldots$ d'un plan α correspondent les points $A'_\alpha, B'_\alpha, \ldots$ d'un plan α' qui passe par X'_α et qui est perpendiculaire sur x'. A l'ensemble des plans $\alpha, \beta, \ldots$ de E^3 correspond donc un faisceau de plans $\alpha, \beta, \ldots$ perpendiculaires sur x'

Soit maintenant g_α une droite quelconque de α; les cordes s_a qui la rencontrent forment un paraboloïde qui a en commun avec ε^m la droite g^m. Les rayons correspondants s'_a forment par conséquent un faisceau plan de rayons. Chaque point A_α de g_α est à la fois sur s_a et sur α. Tout point de l'intersection du faisceau de rayons avec α' correspond donc à un point de g_α, c'est-à-dire qu'à chaque droite g_α correspond dans α' une droite g'_α. Mais à chaque point à l'infini de α correspond un point à l'infini de α'. Il s'ensuit que les plans α et α' constituent des systèmes plans en affinité.

17. Considérons maintenant le faisceau de rayons de α dont le centre est X_α. Il lui correspond dans α' un faisceau homologue dont le centre est X'_α. Soient $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ et $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ les paraboloïdes correspondant aux droites p_α et n_α.

$[xn^m]$ est le plan directeur des cordes situées sur $\mathfrak{P}_p^{(2)}$ et $[xp^m]$ celui des cordes de $\mathfrak{P}_n^{(2)}$. Ces deux plans sont perpendiculaires l'un sur l'autre. La même chose a lieu par conséquent pour les plans parallèles de la gerbe O'. Ils couperont

donc α' suivant deux rayons perpendiculaires l'un sur l'autre, p'_α et n'_α, qui correspondent aux droites rectangulaires p_α et n_α, c'est-à-dire que pour chaque couple de plans α et α' les couples de rayons $p_\alpha n_\alpha$, $p'_\alpha n'_\alpha$ sont des couples correspondants de rayons à angle droit. Si nous considérons, au contraire, deux autres rayons de α' perpendiculaires l'un sur l'autre, les rayons correspondants de α ne peuvent pas être à angle droit, car alors les faisceaux α et α' seraient égaux entre eux. Comme d'ailleurs les faisceaux de $\alpha', \beta', \ldots$ qui ont leurs centres sur x' sont égaux entre eux, il faudrait aussi que tous les faisceaux de $\alpha, \beta, \ldots$ le fussent, ce qui ne peut pas avoir lieu.

Toutes les cordes qui font le même angle avec l'axe principal ont comme correspondantes dans O' les génératrices s'_a d'un cône de révolution dont l'axe est x'. Celui-ci coupe α' suivant un cercle dont le centre est X'_α. Dans le plan qui lui correspond par affinité, ce cercle aura comme courbe correspondante une ellipse dont le centre est X_α, et dont les axes principaux sont p_α et n_α. Nous allons faire voir que n_α est le petit axe et p_α le grand axe de l'ellipse.

Considérons d'abord l'ellipse située dans ε^m. Toutes les cordes s_a, qui font des angles égaux avec l'axe principal, sont à égale distance de cet axe. Soit alors P^m l'extrémité de l'axe dirigé suivant p^m, N^m l'extrémité de l'axe dirigé suivant n^m; soient enfin s_p et s_n les cordes qui passent par ces points. n_α est perpendiculaire sur x, et p_α forme avec x un angle aigu. Mais N^m est le point de s_n qui est à la plus petite distance de x, et P^m est le point analogue sur s_p. On a donc, en effet, $N^m X^m < P^m X^m$, c'est-à-dire que $N^m X^m$ est le petit axe, et $P^m X^m$ est le grand axe de l'ellipse.

De là on peut aussi conclure le théorème pour les autres plans de E^3, et il s'ensuit que :

Toutes les cordes qui sont également inclinées sur l'axe principal coupent chaque plan α du faisceau E^3 suivant une ellipse dont le grand axe est sur p_α et le petit axe sur n_α.

Les grands axes de toutes ces ellipses forment le paraboloïde $\mathfrak{P}_p^{2)}$, et les petits axes le paraboloïde $\mathfrak{P}_n^{2)}$. Les centres de ces ellipses sont sur l'axe principal de E^3.

Les cordes s_a elles-mêmes sont sur une surface réglée R du quatrième ordre. A chaque cône de révolution K′ de O′, qui a x' pour axe, correspond une pareille surface. Tous ces cônes découpent sur α' des cercles concentriques. Les extrémités des diamètres situés sur p'_α et n'_α forment des séries congruentes de points. Les extrémités des axes de toutes les ellipses suivant lesquelles α est coupé par les surfaces R forment des ponctuelles correspondantes, qui, par conséquent, sont semblables entre elles.

Donc :

Dans chaque plan du faisceau symétrique de plans E^3, *les axes des ellipses suivant lesquelles ce plan est coupé par les surfaces réglées* R *sont dans un rapport constant.*

18. Le plan perpendiculaire à l'axe du déplacement ne fait pas partie des plans du faisceau ; il a pourtant, par rapport à celui-ci, une signification spéciale que nous voulons encore mentionner.

Désignons par t_α la droite suivant laquelle le plan α touche le faisceau E^3. Si g^m est une droite quelconque du plan médian ε^m, on obtiendra la corde s_α du paraboloïde $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ situé dans α, en menant par le point d'intersection de g_α et t_α la seconde tangente à la parabole située dans α.

Cela aura lieu aussi pour ε_∞. Si donc t_∞ est le rayon de contact de ε_∞, l'axe de $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ situé dans ce plan sera la tangente différente de t_∞, que l'on peut mener de $(g_\infty\, t_\infty)$ à la parabole située dans ε_∞. Le point d'intersection des deux droites à l'infini sur $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ est donc sur t_∞, c'est-à-dire que l'axe principal de $\mathfrak{P}_g^{(2)}$ passe toujours par un point de t_∞.

Donc :

Le plan perpendiculaire à l'axe principal du faisceau symétrique de plans contient le rayon de contact t_∞ *du plan de l'infini qui appartient au faisceau.*

Enfin déterminons encore le point de contact du plan de l'infini. Pour cela, considérons le paraboloïde $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ correspondant à la droite n^m. Comme du point à l'infini $(n_\infty\, t_\infty)$ on ne peut pas mener de tangente différente de t_∞ à la pa-

rabole du plan ε_∞, il faut que le point $(n_\infty\ t_\infty)$ soit le point de contact du plan.

Donc :

Le plan à l'infini de E^3 *a, comme point de contact, le point où* t_∞ *est coupée par un plan perpendiculaire à* n^m.

19. Si nous appliquons les théorèmes précédents à un système qui se meut d'une manière quelconque, nous finissons par arriver aux résultats suivants :

Tous les plans de Σ, *dont les caractéristiques sont dans un plan quelconque* ε *de l'espace, forment un faisceau symétrique de plans du troisième ordre, qui admet* ε *comme plan principal et l'axe du déplacement comme axe principal. Les tangentes aux trajectoires de tous les points de* ε *forment un système particulier de rayons du troisième ordre et de la première classe. Toutes les tangentes qui sont également inclinées sur l'axe du déplacement rencontrent* ε *suivant une ellipse dont le centre est sur* x.

Le cercle cubique c^3 et le faisceau E^3 sont des formes réciproques dans le système focal formé par Σ et Σ^v, c'est-à-dire que les plans normaux de tous les points de c^3 forment un faisceau symétrique de plans. Si nous considérons, en effet, le cercle cubique dont le centre est en D, et si nous nommons encore ε le plan normal δ^v de D, la perpendiculaire abaissée de D sur x est dans le plan ε, et c'est la droite de ce plan que nous avions désignée par n. Si A et B sont deux points conjugués de D et n_α et n_β les perpendiculaires abaissées de ces points sur x, n_α et n_β sont également inclinés sur le plan $[x\,n]$. Il s'ensuit que ces perpendiculaires forment le paraboloïde $\mathfrak{P}^2$, et que le point $(x\,n) = X$ en est le sommet. De plus, A et B sont à égale distance de l'axe de déplacement; donc les plans normaux α^v, β^v qui passent par n_α et n_β font des angles égaux avec x; enfin, A et B sont aussi à égale distance du sommet du paraboloïde : donc les points X_α et X_β où α^v et β^v rencontrent l'axe sont à des distances égales de X; et de là il suit que le faisceau des plans α^v, β^v possède exactement les propriétés qui définissent E^3, c'est-à-dire :

Les plans normaux de tous les points du cercle cubique forment un faisceau symétrique de plans de troisième ordre E^3, *et les foyers des plans d'un pareil faisceau forment toujours un cercle cubique* (1).

VIII. — Le complexe des axes de courbure.

1. Dans ce qui suit, nous considérerons trois positions arbitrairement choisies du système, Σ_0, Σ_1, Σ_2. Nous désignerons par Σ_{01}^m le système formé par le milieu des cordes correspondant à Σ_0 et Σ_1, et Σ_{12}^m sera le système analogue pour Σ_1 et Σ_2. Les systèmes formés par les plans normaux seront désignés par Σ_{01}^ν et Σ_{12}^ν. L'axe du mouvement hélicoïdal correspondant à Σ_1 et Σ_2 sera x_{01} ou x'_{01} selon qu'on le considère comme appartenant à Σ_0 ou Σ_1; x_{12} ou x'_{12} sera l'axe du déplacement pour Σ_1 et Σ_2. Comme chacun des systèmes Σ_{01}^ν et Σ_{12}^ν est en correspondance réciproque avec Σ, les deux systèmes sont en collinéation. Ils engendreront par conséquent un complexe tétraédral de rayons qui est formé par l'ensemble des droites d'intersection des plans correspondants. Deux plans correspondants α_{01}^ν et α_{12}^ν se coupent suivant une droite k_a passant par le centre du cercle circonscrit au triangle $A_0 A_1 A_2$ et perpendiculaire au plan de ce triangle. Appelons-la *axe central* du point A, il s'ensuivra que :

Les axes centraux des points d'un système à trois dimensions forment un complexe tétraédral de rayons.

2. On peut démontrer que ce complexe ne contient, en général, ni points principaux ni plans principaux réels. Les plans principaux du complexe sont les plans de Σ_{01}^ν qui se confondent avec leurs correspondants dans Σ_{12}^ν. Si α_{01}^ν et α_{12}^ν forment un couple de pareils plans, il faut que A_0 se

---

(1) De là il faut conclure que la parabole cubique dont les plans osculateurs forment le faisceau E^3 est d'une nature spéciale. Considérons, en effet, une ellipse cubique quelconque appartenant au système Σ et dont le point réel à l'infini est le point X_∞, le faisceau réciproque formé par les plans normaux renfermera aussi le plan de l'infini; mais il ne peut pas être identique avec celui qu'on a considéré dans le texte.

confonde avec A_2. En général, cela n'aura pas lieu, car les deux espaces congruents Σ_0 et Σ_2 n'ont pas de point uni à distance finie.

Si A_0 se confond avec A_2, les deux systèmes Σ_0 et Σ_2 peuvent être considérés comme deux positions d'un corps rigide qui tourne autour d'un point fixe. Alors il y aura aussi un axe commun passant par le point A (Chap. II). Chaque point B_0 de cet axe se confond avec B_2; donc aussi B^m_{01} avec B^m_{12} et β^ν_{01} avec β^ν_{12}, c'est-à-dire que les deux systèmes collinéaires ont en commun un faisceau de plans, par suite aussi une ponctuelle. Si donc le complexe a *un* plan principal réel, il en a une infinité qui forment un faisceau de plans.

Si de plus deux autres plans correspondants γ^ν_{01} et γ^ν_{12} de Σ_0 et Σ_2 se confondent, ces plans n'appartenant pas au faisceau dont il vient d'être question, il s'ensuivra que C_0 et C_2 se confondent. Mais alors Σ^ν_{01} et Σ^ν_{12} ont tous leurs points et leurs plans correspondants unis, et le complexe des droites k devient indéterminé.

Nous arrivons par suite au théorème suivant :

Le complexe des axes centraux ne possède, en général, ni points principaux, ni plans principaux réels; s'il a des plans principaux réels, ceux-ci forment un faisceau de plans.

Il existe encore un cas d'exception dont il faut faire mention : c'est le cas où le plan de l'infini est un plan principal pour Σ^ν_{01} et Σ^ν_{12}. Ce plan est toujours le plan normal à l'infini sur l'axe du déplacement. Si donc il doit être un plan principal pour les systèmes Σ^ν_{01} et Σ^ν_{12}, il faut que les axes des deux déplacements successifs soient parallèles, ou qu'ils se confondent. Inversement, il est clair que, si les deux axes sont parallèles, le plan de l'infini est un plan qui se correspond à lui-même dans les deux espaces collinéaires Σ^ν_{01} et Σ^ν_{12} : c'est donc aussi un plan principal du complexe engendré. Si les axes x'_{01} et x'_{12} des déplacements consécutifs ne sont pas parallèles, le plan normal du point à l'infini sur x_{01} est pour le premier déplacement le plan de l'infini; mais, pour le deuxième déplacement, le plan normal du point à l'infini sur x_{01} est, comme le plan normal de tout point à l'infini, parallèle à x'_{12}.

Il était nécessaire de faire une mention spéciale de ce cas d'exception, parce qu'il est important et que nous le retrouverons plus loin.

3. Le complexe de rayons formé par k_a peut être facilement rapporté projectivement au système Σ, et cela, en adjoignant à chaque point A de Σ le rayon k_a du complexe qui est l'intersection des plans α^{ν}_{01} et α^{ν}_{12}. Mentionnons, parmi toutes les conséquences qui s'en déduisent, les suivantes :

Les axes centraux qui correspondent aux points d'une droite forment, en général, l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde; car ils s'obtiennent par l'intersection de deux faisceaux projectifs de plans, dont les axes sont les droites g^{ν}_{01} et g^{ν}_{12}, réciproques à g. Les droites k_a correspondant aux points d'un plan quelconque ε sont, en général, les sécantes d'une courbe gauche du troisième ordre; car elles s'obtiennent par l'intersection de deux gerbes collinéaires dont les sommets sont les foyers des plans ε^{m}_{01} et ε^{m}_{12}.

De plus, les droites k_a qui passent par un point quelconque de l'espace forment, en général, un cône du second ordre. Celui-ci est engendré par deux faisceaux projectifs de plans dont les axes g^{ν}_{01} et g^{ν}_{12} se coupent au point considéré; c'est pourquoi les points de Σ qui correspondent à ces droites k_a sont sur la droite g réciproque de g^{ν}_{01} et g^{ν}_{12}.

Les axes centraux contenus dans un plan δ de l'espace enveloppent, en général, une conique et les plans de Σ^{ν}_{01} qui coupent les plans correspondants de Σ^{ν}_{12} suivant ces axes forment un faisceau de plans du troisième ordre. Désignons, en effet, par ε^{ν}_{01} le plan δ considéré comme faisant partie de Σ^{ν}_{01}. Il engendrera avec ε^{ν}_{12} un faisceau de plans du troisième ordre qui contient ε^{ν}_{01} et ε^{ν}_{12}. Ce faisceau ne se décomposera pas dans le cas général, car il faudrait alors que ε^{ν}_{01} et ε^{ν}_{12} eussent un élément uni, point ou droite, ce qui n'a pas lieu en général. Si l'on considère le faisceau de plans comme faisant partie de Σ^{ν}_{12}, et que l'on désigne alors par η^{ν}_{12} le plan ε^{ν}_{01}, il lui correspondra dans le système Σ^{ν}_{01} un faisceau déterminé par les plans η^{ν}_{01} et ε^{ν}_{01}. Deux plans correspondants de ces faisceaux se couperont alors suivant une droite k_a du plan ε^{ν}_{01}. A un faisceau de plans contenant les deux plans ε^{ν}_{01} et η^{ν}_{01} correspond,

dans le système Σ, une courbe gauche du troisième ordre, qui passe par les points E et H dont les plans normaux sont $\varepsilon^{\gamma}_{01}$ et η^{γ}_{01}; les points dont les axes centraux sont dans le plan δ forment donc une courbe gauche du troisième ordre qui passe par G et H.

Cette courbe passe encore par un troisième point que l'on peut facilement désigner. Il n'y a pas que les deux plans α^{γ}_{01} et α^{γ}_{12} qui passent par k_a, mais le plan α^{γ}_{20}, perpendiculaire sur $A_0 A_2$ en son milieu, passe aussi par cette droite. L'ensemble des plans α^{γ}_{20} forme un système Σ^{γ}_{02} collinéaire avec Σ^{γ}_{01} et Σ^{γ}_{12}, et le faisceau de plans du troisième ordre dérive des trois systèmes $\varepsilon^{\gamma}_{12}$, $\varepsilon^{\gamma}_{20}$ et $\varepsilon^{\gamma}_{01}$. Si donc nous désignons le plan $\varepsilon^{\gamma}_{01}$, c'est-à-dire le plan δ, considéré comme faisant partie de Σ^{γ}_{20} par φ^{γ}_{20}, il faudra que la courbe gauche du troisième ordre passe aussi par le point F de Σ dont le plan normal est φ^{γ}_{02} dans le système Σ^{γ}_{02}.

Il en résulte que :

Les points du système Σ, pour lesquels les axes centraux sont dans un plan quelconque δ de l'espace, forment une courbe gauche du troisième ordre. Celle-ci passe par les trois points de Σ qui ont le plan δ pour plan normal dans les trois systèmes Σ^{γ}_{12}, Σ^{γ}_{20}, Σ^{γ}_{01}.

Comme le faisceau de plans du troisième ordre qui correspond à la courbe gauche dans le système Σ^{γ}_{01} est engendré par les trois systèmes plans en collinéation $\varepsilon^{\gamma}_{01}$, η^{γ}_{01}, φ^{γ}_{01}, il s'ensuit que la courbe gauche peut être engendrée par deux quelconques des trois gerbes collinéaires dont les sommets sont les points E, H et F de Σ.

4. Si pour le plan δ on choisit le plan de l'infini, les droites k_a situées dans ce plan forment un faisceau de rayons du second ordre, le plan de l'infini ne se correspondant pas, en général, à lui-même. Les points correspondants A de Σ seront sur une courbe gauche du troisième ordre. Mais, pour chaque point de cette courbe, les deux plans normaux correspondants seront parallèles; il est donc tellement placé que A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite. Désignons par x_{20} ou x'_{20} l'axe du déplacement qui correspond aux positions Σ_0 et Σ_2 et

observons que le plan de l'infini est le plan normal du point à l'infini sur l'axe, que, par conséquent, F, H et E sont les points à l'infini sur les trois droites x_{12}, x_{20}, x_{01}, il s'ensuivra :

Tous les points A *du système invariable pour lesquels* A_0, A_1, A_2 *sont en ligne droite, forment en général une courbe gauche du troisième ordre. Celle-ci passe par les trois points à l'infini sur les trois axes du déplacement* x_{12}, x_{20}, x_{01} *qui correspondent aux groupes* $\Sigma_1 \Sigma_2$, $\Sigma_2 \Sigma_0$ *et* $\Sigma_0 \Sigma_1$.

Cette courbe sera donc généralement une hyperbole gauche : on l'appellera *courbe des inflexions* de Σ et on la désignera par i^3_{012}.

La courbe des inflexions i^3_{012} passe aussi par les quatre points principaux du complexe formé par Σ^v_{01} et Σ^v_{12}, car pour ces quatre points principaux le plan normal α^v_{01} est identique avec α^v_{12}, et, par suite, toute droite de ce plan peut être considérée comme axe de courbure; en particulier, cela sera vrai pour la droite de l'infini. D'ailleurs on voit directement que, pour tout point principal, C_0 est identique avec C_1 et que, par suite, C_0, C_1, C_2 sont en ligne droite.

Aussi longtemps que cette courbe ne se décomposera pas, il ne peut y avoir sur une droite quelconque que deux points A pour lesquels les trois positions A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite. Pour une telle droite, les deux paraboloïdes formés par les cordes $A_0 A_1$ et $A_1 A_2$ de ses différents points ont deux génératrices communes, d'où l'on peut conclure en passant que la courbe d'intersection de ces paraboloïdes se décompose en quatre droites. L'ensemble des droites de cette espèce forme un système de rayons du premier ordre et de la troisième classe, le système des sécantes de la courbe i^3_{012}.

Comme on l'a fait voir plus haut, les axes centraux des points d'une droite quelconque g constituent l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde. Si la droite g a un point en commun avec la courbe des inflexions, l'hyperboloïde dégénère en paraboloïde. Si g renferme deux points de la courbe des inflexions, c'est-à-dire, si g est une sécante de cette courbe, deux droites k sont à l'infini, c'est-à-dire que deux couples de plans normaux correspondants des faisceaux g^v_{01} et g^v_{12} sont parallèles. Donc g^v_{01} et g^v_{12} sont elles-mêmes

parallèles; les droites k forment une surface cylindrique, qui peut être hyperbolique, elliptique ou parabolique suivant que g est une sécante propre, impropre ou une tangente de i^3_{012}.

5. Les résultats qui viennent d'être acquis ne sont plus applicables lorsque le plan de l'infini se correspond à lui-même dans $\Sigma^{\vee}_{01}$ et $\Sigma^{\vee}_{12}$, c'est-à-dire, lorsque les deux axes x_{01} et x_{12} sont parallèles. On a démontré, en effet, que la courbe gauche pouvait être regardée comme le résultat de l'intersection de deux gerbes collinéaires de rayons, dont les sommets sont les points à l'infini des deux droites x_{01} et x_{12}. Mais, tandis qu'en général x_{01} et x_{12} ne se coupent pas, on obtient dans ce cas les points A de la courbe des inflexions au moyen de deux gerbes collinéaires de rayons dont les sommets sont les points à l'infini sur deux droites parallèles. Le lieu de ces points situés à distance finie se réduit donc à une droite, parallèle à l'axe du déplacement.

Mais, inversement, on peut faire voir que si la courbe gauche i^3_{012} se décompose, il faut que les axes des deux mouvements hélicoïdaux soient parallèles; car si i^3_{012} se décompose, il existe une droite g pour tous les points de laquelle A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite. Mais les cordes de tous les points d'une droite de Σ forment, en général, l'un des systèmes de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique; dans le cas considéré, celui-ci renferme trois positions g_0, g_1, g_2 de la droite g_1 et ces trois droites sont coupées par toutes les génératrices suivant des ponctuelles congruentes. Mais cela ne peut pas se présenter pour un paraboloïde proprement dit; car deux génératrices qui sont rencontrées par les génératrices de l'autre système suivant des ponctuelles congruentes sont également inclinées sur le plan directeur des génératrices de ce système, et il ne peut y avoir que deux pareilles droites. C'est pourquoi les lignes de jonction des points homologues de g_0 et g_1 sont toutes dans un plan, et il en résulte qu'elles sont parallèles entre elles; autrement il n'y aurait que deux points de l'espèce considérée sur g. Mais toute droite pour laquelle les cordes A_0A_1 sont toutes parallèles est parallèle à l'axe du déplacement; il faut donc que g_0 soit parallèle à l'axe x_{01} lui-même. Si l'on observe maintenant que les cordes A_0A_1 sont

identiques en direction avec les cordes A_1A_2, il s'ensuivra de même que g_1 est parallèle à l'axe x_{12}, c'est-à-dire que les deux axes sont parallèles.

Il en résulte donc que :

S'il existe une droite telle que pour chacun de ses points A, A_0, A_1, A_2 *soient en ligne droite, les deux axes* x_{01} *et* x_{12}, *autour desquels se font les deux mouvements hélicoïdaux, sont parallèles entre eux et inversement, si les axes* x_{01} *et* x_{12} *sont parallèles, il existe une pareille droite.*

6. Tandis qu'il y a une infinité de points pour lesquels trois positions consécutives sont en ligne droite, il n'y aura pas, en général, de point à distance finie pour lequel A_3 sera aussi sur la même droite. Si, en effet, Σ_3 est la troisième position du système, il correspond à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ une courbe gauche i^3_{123} lieu des points A pour lesquels A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite. La courbe gauche i^3_{012} est le résultat de l'intersection de deux gerbes collinéaires dont les centres sont à l'infini sur x_{01} et x_{12}. De même i^3_{123} provient de l'intersection de deux gerbes collinéaires dont les centres sont à l'infini sur x_{12} et x_{23}. Ces deux courbes n'auront donc, en général, en commun que le point à l'infini sur x_{12}; elles n'auront d'autre point commun que dans le cas où trois rayons correspondants des trois gerbes collinéaires se coupent en un seul et même point, ce qui n'arrivera pas en général.

7. Si les positions $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ se rapprochent indéfiniment, l'axe central k_a se transformera en axe de courbure de la trajectoire de A. Les points de la courbe i^3_{012} deviendront les points du système qui passent par des points d'inflexion de ces trajectoires. La courbe i^3_{012} se transforme en une parabole cubique que nous désignerons par i^3.

Nous obtenons ainsi pour le mouvement continu d'un système les trois théorèmes suivants :

Les axes de courbure des trajectoires de tous les points de Σ *forment à chaque instant un complexe tétraédral de rayons. Les points principaux et les axes principaux sont imaginaires.*

Lorsqu'un système à trois dimensions se déplace, il existe à chaque instant une infinité de points qui passent par des points d'inflexion de leur trajectoire. Ils forment en général une parabole cubique i^3 qui contient le point à l'infini de l'axe instantané et les points principaux du complexe tétraédral. Si les surfaces polaires sont cylindriques, i^3 se réduit à une droite [1].

Les conséquences qui se déduisent du premier de ces deux théorèmes sont tout à fait analogues à celles que nous avons énoncées dans le cas de positions distinctes des systèmes. Il paraît donc superflu de les énoncer encore une fois.

8. Il existe également un complexe d'axes centraux k'_b et une courbe des inflexions $i^{3'}$ dans le cas du mouvement inverse de Σ' dans l'espace Σ. Les deux systèmes ont une relation réciproque. Si B' est en effet un point de la droite k_a, le plan normal β'^{γ}_{01} passe par A, puisque k_a est dans α^{γ}_{01} (IV, 8), et comme k_a est aussi dans α^{γ}_{12}, le plan β'^{γ}_{12} passe aussi par A. Le point A est donc sur l'axe central k'_b du point B' lors du mouvement inverse. Cela a lieu pour tout point B' de k_a. Désignons alors par h', k_a considérée comme droite de Σ', il s'ensuit que les axes k'_b de tous les points de $k_a = h'$ forment un cône. Ainsi, tandis que les axes centraux d'une droite quelconque forment en général un hyperboloïde, un axe de courbure se distingue par ceci, c'est que l'hyperboloïde se réduit à un cône; pour un déplacement infiniment petit, nous arrivons donc à cette conclusion :

Le complexe des axes de courbure du mouvement primitif et celui du mouvement inverse ont entre eux une correspondance réciproque : chaque axe k_a est une droite de Σ' pour les points de laquelle les axes de courbure forment un cône, et la même chose a lieu pour les axes k'_b considérés comme étant des droites de Σ.

---

[1] Everett reconnut le premier la signification exacte de la courbe des inflexions : *Kinematics of a rigid body* (*Quarterly journal*, t. XIII, p. 39).

La courbe des inflexions de Σ' est donc le lieu des sommets des cônes qui correspondent à des droites situées à l'infini dans Σ, et de même, la courbe des inflexions de Σ contient les sommets des cônes qui correspondent à des droites à l'infini dans Σ'.

De plus, chaque sécante de i^3 appartient au complexe des axes de courbure k', car les axes de courbure de ses points forment un cylindre. De même, toute sécante de la courbe des inflexions i'^3 est une droite du complexe k dans le mouvement direct.

Si nous considérons l'axe de courbure k_a comme une droite h' de Σ', A est le sommet du cône correspondant. Si nous désignons l'axe k'_b par g en tant que droite de Σ, B' est le point de Σ', sommet du cône correspondant à $g = k'_b$ c'est-à-dire que :

Si g est une droite de Σ pour les points de laquelle les axes de courbure forment un cône, le sommet du cône sera le point B' *de Σ' dont la trajectoire a comme axe de courbure la droite g lors du mouvement inverse* ([1]).

IX. — La correspondance cubique et les points à courbure stationnaire.

1. Soient Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 quatre positions quelconques du système, et Σ^{ν}_{01}, Σ^{ν}_{12}, Σ^{ν}_{23} les systèmes de plans normaux correspondant aux cordes A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3. Trois plans correspondant au même point A se coupent en un point A' de Σ', qui est le centre d'une sphère passant par les points A_0, A_1, A_2, A_3. Mais les plans normaux qui, dans le mouvement inverse, répondent aux cordes $A'_0A'_1$, $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, se coupent au point A, c'est-à-dire que A est le centre de la sphère qui passe par A'_0, A'_1, A'_2, A'_3.

Faisons correspondre deux pareils points A et A' de Σ et Σ', les deux espaces ainsi rapportés l'un à l'autre auront une correspondance univoque. A chaque point de Σ correspond,

---

([1]) *Voir* SCHŒNFLIES, *Journal für die reine und angewandte Math.*, t. XCVIII, p. 267.

en général, un point de Σ', et inversement. Nous allons reconnaître plus loin quel est le genre de cette correspondance.

Si les points A de Σ sont sur une droite g, les centres A′ des sphères correspondantes seront sur une courbe gauche du troisième ordre. Elle résulte de l'intersection de trois faisceaux projectifs de plans, dont les axes sont les droites g^{ν}_{01}, g^{ν}_{12}, g^{ν}_{23}. Inversement, aux points A′ de Σ' qui sont sur une droite correspondent dans Σ les points A d'une courbe gauche du troisième ordre. Car chacun de ces points A est l'intersection des plans correspondants $\alpha^{\nu'}_{01}$, $\alpha^{\nu'}_{12}$, $\alpha^{\nu'}_{23}$ des faisceaux projectifs qui ont $g^{\nu'}_{01}$, $g^{\nu'}_{12}$, $g^{\nu'}_{23}$ pour axes.

Si les points A de Σ sont sur un plan ε, les points A′ de Σ' formeront une surface du troisième ordre. Elle est engendrée par l'intersection de trois gerbes collinéaires, qui ont comme centres les foyers de ε^{m}_{01}, ε^{m}_{12}, ε^{m}_{23}. Inversement, à tous les points A′ d'un plan ε' de Σ' correspondent les points d'une surface du troisième ordre de Σ; car les plans normaux $\alpha^{\nu'}_{01}$, $\alpha^{\nu'}_{12}$, $\alpha^{\nu'}_{23}$ qui, dans le mouvement inverse, sont associés aux points A′ de Σ', forment également trois gerbes en collinéation.

La correspondance qui existe entre les deux espaces Σ et Σ' s'appellera par suite une *correspondance cubique* (¹). Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Si l'on fait correspondre à tout point A *de* Σ *le point* A′ *de* Σ' *où se coupent les plans normaux* α^{ν}_{01}, α^{ν}_{12}, α^{ν}_{23}, A *sera en même temps le point d'intersection des trois plans normaux* $\alpha^{\nu'}_{01}$, $\alpha^{\nu'}_{12}$, $\alpha^{\nu'}_{23}$ *du point* A′ *dans le mouvement inverse. Les systèmes* Σ *et* Σ', *ainsi rapportés l'un à l'autre, sont en correspondance cubique.*

2. Au plan à l'infini ε'_{∞} de Σ' correspond aussi, dans le système Σ, une surface du troisième ordre; on la désignera par F^{3}_{0123} ou encore par F^{3}_{03}. Chacun de ses points se fait remar-

(¹) *Voir* Schœnflies, *Journal für die reine und angewandte Math.*, t. XCVII, p. 274. Mehmke la découvrit d'une manière indépendante (*Civilingenieur*, t. XXIX, p. 581). La correspondance cubique a été étudiée à fond par Nöther et Cremona (*Math. Annalen*, t. III, p. 552 et *Annali di Mat.*, 2ᵉ série, t. V, p. 131). *Voir* aussi Sturm (*Math. Annalen*, t. XXII, p. 480).

quer par cette propriété que le centre de la sphère qui passe par A_0, A_1, A_2, A_3 est à l'infini.

Les quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 sont donc dans un plan. Les courbes des inflexions i^3_{012} et i^3_{123} sont situées sur la surface F^3_{03}. Car, A étant un point de i^3_{012}, A_0, A_1, A_2 sont en ligne droite et, par conséquent, A_0, A_1, A_2, A_3 sont dans un plan, et de la même manière, B étant un point de i^3_{123}, B_1, B_2, B_3 sont en ligne droite, et B_0, B_1, B_2, B_3 dans un plan.

Il existe aussi dans Σ' une surface analogue $F^{3\prime}_{03}$ qui, dans le mouvement inverse, correspond au plan ε_∞ de Σ. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 *étant quatre positions quelconques du système à trois dimensions, il existe une infinité de points* A *appartenant à ce système, et jouissant de cette propriété que* A_0, A_1, A_2, A_3 *sont dans un plan. Leur ensemble forme une surface du troisième ordre* F^3_{03}, *sur laquelle sont aussi les courbes des inflexions* i^3_{012} *et* i^3_{123}. *Il existe une surface correspondante pour le mouvement inverse dans le système* Σ'.

3. Considérons encore une cinquième position Σ_4, tous les points A de Σ pour lesquels A_1, A_2, A_3, A_4 sont dans un même plan forment une surface du troisième ordre F^3_{14}. Les surfaces F^3_{03} et F^3_{14} renferment toutes les deux la courbe i^3_{123} ; elles se coupent donc en outre suivant une courbe gauche du sixième ordre, que nous désignerons par c^6_{04}. Comme F^3_{03} contient la courbe c^6_{04}, la courbe c^6_{15} sera sur F^3_{14}. F_{14} contient donc c^6_{04} et c^6_{15}, c'est-à-dire que chaque surface F^3 contient deux courbes c^6 de cette espèce.

On démontre que, pour chaque point A de la courbe c^6_{04}, les cinq positions A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sont dans un même plan. Car A_0, A_1, A_2, A_3 sont dans un plan, ainsi que A_1, A_2, A_3, A_4 ; les deux plans ont en commun les trois points A_1, A_2, A_3, et comme ceux-ci ne sont pas, en général, sur une droite, les deux plans se confondent.

Ceci n'arrivera pas nécessairement lorsque A_1, A_2, A_3 sont en ligne droite. Alors les deux plans seront, en général, différents l'un de l'autre, et se couperont suivant une droite $A_1A_2A_3$.

Donc :

Si l'on donne cinq positions arbitrairement choisies d'un système à trois dimensions, il existe une infinité de points A *pour lesquels* A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *sont dans un même plan. Ces points forment, en général, une courbe gauche du sixième ordre* c_{04}^6, *qui, avec* i_{123}^3, *constitue l'intersection des surfaces* F_{03}^3 *et* F_{14}^3.

4. Considérons encore une sixième position du système Σ_5, il existera une surface F_{25}^3 de Σ pour laquelle les points A jouissent de cette propriété que A_2, A_3, A_4, A_5 sont dans le même plan. Les trois surfaces F_{03}^3, F_{14}^3, F_{25}^3 se coupent en vingt-sept points. Pour chacun de ces points, quatre positions consécutives sont dans le même plan, et, lorsque le point ne sera ni sur i_{123}^3, ni sur i_{234}^3, les plans

$$[A_0, A_1, A_2, A_3], \quad [A_1, A_2, A_3, A_4], \quad [A_2, A_3, A_4, A_5]$$

se confondent, c'est-à-dire que six positions consécutives du point seront dans un même plan. Si, par contre, A est un point de i_{123}^3, les plans

$$[A_0, A_1, A_2, A_3] \quad \text{et} \quad [A_1, A_2, A_3, A_4]$$

ne se confondent pas nécessairement, leurs trois points communs étant en ligne droite ; et si A est un point de i_{234}^3, la même chose aura lieu pour les plans

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] \quad \text{et} \quad [A_2, A_3, A_4, A_5].$$

Les surfaces F_{03}^3 et F_{14}^3 contiennent toutes les deux la courbe i_{123}^3. Celle-ci coupe la surface F_{25}^3 en neuf points qui sont sur les trois surfaces. De même F_{14}^3 et F_{25}^3 contiennent la courbe i_{234}^3 et les neuf points d'intersection avec F_{03}^3 sont aussi des points communs aux trois surfaces. Mais les courbes i_{123}^3 et i_{234}^3 ont un point commun, qui est le point à l'infini de la droite x_{23}; ce point appartient donc aussi bien à l'intersection de i_{123}^3 avec F_{25}^3 qu'à celle de i_{234}^3 avec F_{03}^3. Les deux groupes de neuf points chacun ne représentent donc que dix-sept points distincts; il reste donc dix points d'intersection, qui ne sont ni sur i_{123}^3, ni sur i_{234}^3, et il s'ensuit :

Si l'on donne arbitrairement six positions du système Σ, il existe, en général, dix points A *pour lesquels* A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *sont dans un même plan.*

Ces dix points sont en même temps les points d'intersection des deux courbes c^6_{04} et c^6_{15}. Deux courbes consécutives de cette espèce se coupent donc, en général, en dix points. Parmi eux sont tous les points du système invariable qui sont forcés de se mouvoir dans un plan fixe.

5. Passons au cas de positions infiniment rapprochées du système, tout plan $[A_0, A_1, A_2, A_3]$ deviendra un plan osculateur stationnaire, c'est-à-dire ayant avec la trajectoire de A un contact du troisième ordre. Les courbes i^3 et c^6 seront les courbes d'intersection de deux surfaces F^3 consécutives. Nous arrivons donc aux théorèmes suivants :

Si un système Σ se meut d'une manière arbitraire dans l'espace, il existe à chaque instant une infinité de points dont les trajectoires ont, avec leur plan osculateur, un contact du troisième ordre. Ils forment une surface du troisième ordre sur laquelle est la courbe des inflexions i^3. Sur cette surface, il existe une courbe du sixième ordre c^6, dont les points sont tels qu'ils ont un contact du quatrième ordre avec leur plan osculateur ; enfin dix des points de cette courbe présentent cette particularité, que les plans osculateurs de leurs trajectoires ont avec elles un contact du cinquième ordre.

L'enveloppe des surfaces F^3 se décompose en deux surfaces de signification cinématique différente ; l'une est le lieu de toutes les courbes des inflexions et contient les points qui décrivent des trajectoires à tangente stationnaire ; l'autre est le lieu des points dont les trajectoires ont, au cours du mouvement, un contact de quatrième ordre avec leur plan osculateur. Sur cette surface, il existe d'ailleurs une courbe, lieu des points qui décrivent des trajectoires ayant, avec leur plan osculateur, un contact du cinquième ordre ; elle est l'enveloppe de toutes les courbes c^6.

6. Il existe encore sur la surface F^3_{03} une autre courbe du sixième ordre qu'il est utile de mentionner. Parmi les points

A du système Σ situés sur F^3_{03}, il en existe pour lesquels les quatre positions A_0, A_1, A_2, A_3 sont, non seulement dans le même plan, mais encore sur le même cercle. Pour les points de cette espèce, il faut que les trois plans normaux correspondants α^{ν}_{01}, α^{ν}_{12}, α^{ν}_{23} se coupent suivant une même droite. Si ε est un plan arbitraire de Σ, les plans normaux de ses points forment trois gerbes de plans en collinéation, dont les sommets sont les foyers de ε'''_{01}, ε'''_{12} et ε'''_{23}, lesquels ne se confondent pas en général. Mais on sait qu'il existe, en général, six droites suivant lesquelles se coupent trois plans correspondants des trois gerbes ; donc le plan ε contiendra aussi, en général, six points de l'espèce considérée. Il en résulte donc que :

Si l'on donne arbitrairement quatre positions du système Σ, il existe une infinité de points A tels que A_0, A_1, A_2, A_3 soient sur un cercle. Ces points forment une courbe gauche du sixième ordre qui est située sur la surface F^3_{03}.

Nous désignerons cette courbe par k^6_{0123} ou encore par k^6_{03}. Il existe dans le système Σ' une courbe analogue pour le mouvement inverse. Les points de ces deux courbes font une exception à la règle trouvée plus haut et qui dit que, dans la correspondance cubique, il correspond à chaque point d'un système un point déterminé de l'autre. Car les plans normaux α^{ν}_{01}, α^{ν}_{12}, α^{ν}_{23} d'un point A de k^6_{03} se coupant suivant une même droite, au point A de Σ, il ne correspondra plus un point, mais une droite, qui est l'axe de courbure de la trajectoire du point A. La même chose a lieu pour les points de la courbe $k^{6\prime}_{03}$ de Σ'.

Si k_a est l'axe de courbure de ce point A, il s'ensuit inversement que, à *tout* point B' de k_a, correspondra dans le système Σ le point A.

Mais à chaque plan ε' de Σ' correspondait, dans le système Σ, une surface du troisième ordre ; comme ε' a au moins un point commun B' avec l'axe de courbure de tout point A de k^6_{03}, il s'ensuit que tous les points de k^6_{03} sont, sur cette surface du troisième ordre; c'est-à-dire que toute surface du troisième ordre de Σ, qui, dans la correspondance cubique, correspond à un plan de Σ', contient la courbe k^6_{03} ; de même

$k_{03}^{6\prime}$ est sur toutes les surfaces de Σ' qui correspondent aux plans de Σ.

Les courbes k_{03}^{6} et $k_{03}^{6\prime}$ sont appelées les *courbes fondamentales* des systèmes qui se correspondent cubiquement, Σ et Σ'.

7. Comme les points A de k_{03}^{6} sont définis par ce fait que les trois plans normaux α_{01}^{ν}, α_{12}^{ν}, α_{23}^{ν} passent par la même droite, un point de Σ appartiendra à la courbe si deux de ses plans normaux coïncident. Tout plan α_{01}^{ν} qui se confond avec le plan correspondant α_{12}^{ν} est un plan principal du complexe $\mathfrak{S}_{012}^{(2)}$ formé par les axes centraux k_a correspondant aux deux systèmes Σ_{01} et Σ_{12}. Ce complexe contient, en général, quatre plans principaux imaginaires ; donc les quatre points imaginaires de Σ qui ont ces plans principaux comme plans normaux sont sur la courbe k_{03}^{6}.

Il existe en tout quatre groupes de quatre points imaginaires qui sont sur k_{03}^{6} ; car, pour tout point A de cette courbe, non seulement α_{01}^{ν}, α_{12}^{ν}, α_{23}^{ν} passeront par une même droite k_a, mais aussi α_{02}^{ν}, α_{03}^{ν}, α_{13}^{ν} perpendiculaires sur A_0A_2, A_0A_3, A_1A_3 en leurs milieux.

Mais, au moyen des six systèmes

$$\Sigma_{01}^{\nu},\quad \Sigma_{02}^{\nu},\quad \Sigma_{03}^{\nu},\quad \Sigma_{12}^{\nu},\quad \Sigma_{13}^{\nu},\quad \Sigma_{23}^{\nu},$$

on peut former quatre complexes

$$\mathfrak{S}_{012}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{013}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{023}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{123}^{(2)};$$

il existe donc, en effet, quatre groupes de points imaginaires sur k_{03}^{6}.

Considérons encore une cinquième position du système, Σ_4, et soit k_{14}^{6} la courbe formée par les points A de Σ pour lesquels A_1, A_2, A_3, A_4 sont sur un cercle; elle contiendra les seize points imaginaires de Σ qui correspondent aux plans principaux imaginaires des complexes

$$\mathfrak{S}_{123}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{124}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{134}^{(2)},\quad \mathfrak{S}_{234}^{(2)}.$$

Les deux courbes ont donc, en commun, les quatre points imaginaires qui correspondent aux plans principaux du complexe $\mathfrak{S}_{123}^{(2)}$ dans Σ, et il s'ensuit que :

Les deux courbes k^6_{03} et k^6_{14} se coupent en général en quatre points imaginaires, correspondant aux plans principaux du complexe $\mathfrak{S}^{(2)}_{123}$ formé par les axes centraux.

La propriété analogue a lieu pour les courbes $k^{6'}_{03}$ et $k^{6'}_{14}$ de Σ' dans le mouvement inverse.

8. Pour des positions infiniment voisines des systèmes, les points des courbes k^6_{03} et $k^{6'}_{03}$ jouissent de cette propriété que les cercles de courbure de leurs trajectoires auront un contact du troisième ordre avec ces courbes ; nous obtenons donc le théorème suivant :

Si un système invariable se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, il renferme à chaque instant une infinité de points pour lesquels le cercle de courbure de la trajectoire est surosculateur à cette trajectoire. Ces points forment une courbe gauche du sixième ordre. Les deux courbes sont les courbes fondamentales de la correspondance cubique instantanée qui a lieu entre les espaces Σ et Σ'; la courbe k^6 est donc sur F^3, de même la courbe k'_6 est sur F'_3.

Comme deux courbes consécutives k^6 n'ont, en commun, que quatre points imaginaires, il n'existe pas, en général, de point à distance finie tel que son cercle de courbure ait, avec la trajectoire, un contact du quatrième ordre.

9. Comme on l'a vu plus haut, les centres de courbure, qui correspondent à tous les points d'une droite g, forment une courbe gauche du troisième ordre que nous désignerons par k^3.

Si la droite g rencontre la courbe k^6 une fois, la cubique gauche k^3 se réduit à une conique, ou plutôt se compose de cette conique et de l'axe de courbure stationnaire du point de rencontre [1].

Si la droite g rencontre la courbe k^6 en deux points L et M,

---

[1] *Voir* THEVENET, Thèses présentées à la Faculté des Sciences, 1886, p. 46 et 47.

les centres des sphères osculatrices forment une droite g', composant avec les axes k_l et k_m des points L et M la cubique gauche k^3. A un point quelconque A de la droite g correspond un point A' de g' comme centre de la sphère osculatrice. Mais, comme nous l'avons mentionné plus haut, le point A est centre de la sphère osculatrice de A' pour le mouvement indirect; donc la droite g' rencontre deux fois la courbe $k^{6'}$ du système Σ'. Ainsi, quand on fait abstraction des axes de courbure stationnaires tels que k_l et k_m, on obtient le résultat suivant :

Les cordes des courbes k^6 et $k^{6'}$ des systèmes Σ et Σ' se correspondent de telle manière que les centres des sphères osculatrices relatives aux différents points d'une corde de l'une de ces deux courbes forment eux-mêmes une corde de l'autre courbe.

Il peut arriver que la droite g rencontre la courbe k^6 trois fois; soient L, M, N les points de rencontre. Dans ce cas, les axes k_l, k_m, k_n mis à part, la courbe k^3 se réduit à un seul point S, ce qui exige que les axes k_l, k_m, k_n passent tous par S.

Soit maintenant A un point quelconque de la droite g; les quatre positions A_0, A_1, A_2, A_3 sont à la même distance du point S. Par conséquent, pour le mouvement indirect, S comme point L' de Σ' appartient à la courbe $k^{6'}$ du système Σ' et la droite g est son axe de courbure k'_l. En considérant que les trois axes k_l, k_m, k_n concourent au même point de $k^{6'}$, nous trouvons que par un point quelconque de $k^{6'}$ il passe les axes de trois points de la courbe k^6.

Les courbes k^6 et $k^{6'}$ obéissant aux mêmes lois, il s'ensuit que la surface réglée formée par les axes de courbure des différents points de k^6 est composée de toutes les droites qui rencontrent trois fois la courbe $k^{6'}$. Mais, comme nous venons de le démontrer, par chaque point de $k^{6'}$ il passe trois de ces droites; une quelconque d'entre elles est donc rencontrée par six autres. Il s'ensuit que la surface considérée est du huitième ordre. Donc :

Les droites rencontrant trois fois la courbe k^6 sont les axes

de courbure stationnaires pour le mouvement indirect ; pour chacune d'elles, la courbe des centres des sphères osculatrices se réduit à un seul point appartenant à la courbe $k^{6\prime}$ du mouvement indirect.

La surface réglée formée par les axes de courbure des points de la courbe k^6 est du huitième ordre et contient la courbe $k^{6\prime}$ du mouvement indirect comme courbe triple.

Nous avons vu que les droites telles que les axes de courbure relatifs à tous leurs points forment un cône, constituent un complexe du second ordre, et que les axes de courbure sont les droites analogues pour le mouvement indirect. Nous désignons ces droites sous le nom de *droites pivotantes* (¹). En effet, si S est le sommet du cône relatif à la droite, il est clair que la droite pivote autour du point S.

En faisant usage de cette définition, nous désignons les droites k_l, k_m, ... sous le nom de *droites pivotantes stationnaires* et nous avons le résultat suivant :

A chaque moment, il existe une surface gauche du huitième ordre composée de droites pivotantes stationnaires. Les sommets des cônes formés par les axes de courbure relatifs aux points de ces droites constituent la courbe $k^{6\prime}$ du mouvement indirect

10. Considérons enfin cinq positions arbitrairement choisies du système, Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 et les systèmes de plans normaux correspondant aux cordes A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ces systèmes de plans normaux étant Σ^{ν}_{01}, Σ^{ν}_{12}, Σ^{ν}_{13}, Σ^{ν}_{14}. Quatre plans homologues α^{ν}_{01}, α^{ν}_{12}, α^{ν}_{23}, α^{ν}_{34} forment un tétraèdre ; mais il peut arriver qu'ils se coupent en un même point, A'. Si g est une droite quelconque de Σ, les plans normaux de ses points formeront quatre faisceaux projectifs de plans pour les cinq positions consécutives de Σ ; les axes de ces faisceaux sont g^{ν}_{01}, g^{ν}_{12}, g^{ν}_{23}, g^{ν}_{34}. Mais on sait qu'il existe, en général, quatre plans de chaque faisceau qui concourent en un même point avec les plans correspondants des trois autres. Il existe donc sur cette droite g, en général, quatre points de l'es-

(¹) *Voir* THEVENET, *loc. cit.*

pèce considérée, les quatre points qui correspondent aux quatre plans de chaque faisceau. Il y a donc une infinité de pareils points, et leur ensemble forme une surface du quatrième ordre, que nous désignerons par F^4_{01234} ou F^4_{04}. Chacun des points de cette surface est caractérisé par la propriété d'avoir cinq de ses positions consécutives sur une même sphère.

Le point A′ est le point d'intersection des plans normaux α^{v}_{01}, α^{v}_{12}, α^{v}_{23}, α^{v}_{34}; par conséquent, les plans normaux de A′ se couperont au point A lors du mouvement inverse. Le point A′ est donc tel que, dans le mouvement inverse, ses cinq positions consécutives soient sur une sphère dont le centre est en A. D'autre part, A′ est le centre de la sphère correspondant à A; il s'ensuit donc que les centres des sphères qui appartiennent aux points A de F^4_{04} forment la surface $F^{4\prime}_{04}$ dont les points restent dans le mouvement inverse sur une sphère pour cinq positions consécutives, et que F^4_{04} est le lieu des centres des sphères correspondant aux points A′.

La surface F^4_{04} contient les deux courbes k^6_{03} et k^6_{14}. Car si A est un point k^6_{03}, A_0, A_1, A_2, A_3 sont sur un cercle; par conséquent, ces quatre points sont sur une même sphère avec A_5; de même, si B est un point de k^6_{14}, les cinq points B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 sont sur une sphère, car B_1, B_2, B_3, B_4 sont sur un cercle. La même chose a lieu dans le mouvement inverse. Nous arrivons donc au théorème suivant :

Si l'on donne arbitrairement cinq positions du système, celui-ci contiendra une infinité de points A *tels que* A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 *appartiennent à la même sphère. L'ensemble de ces points forme une surface du quatrième ordre* F^4_{04} *qui renferme les courbes* k^6_{03} *et* k^6_{14}. *Les centres des sphères correspondant aux points de* F^4_{04} *forment également une surface du quatrième ordre* $F^{4\prime}_{04}$. *Les deux surfaces se correspondent dans la transformation cubique qui lie les systèmes* Σ *et* Σ'. *Dans le mouvement inverse, les deux surfaces échangent leur signification* (¹).

(¹) Schœnflies, *Journal für reine und ang. Math.*, t. XCVIII, p. 277.

11. Soit Σ_5 une sixième position du système, et F^4_{15} la surface, lieu des points A pour lesquels A_1, A_2, A_3, A_4 sont sur la même sphère. Les surfaces F^4_{04} et F^4_{15} contiennent toutes les deux la courbe k^6_{14}; elles se couperont donc, en outre, suivant une courbe du dixième ordre k^{10}_{05}. Comme F^4_{04} contient la courbe k^{10}_{05}, la surface F^4_{15} contient encore une courbe analogue k^{10}_{16}. F^{10}_{15} contient donc les deux courbes k^{10}_{05} et k^{10}_{16}, et la même chose a lieu pour toute surface de cette espèce.

Chaque point de k^{10}_{05} jouira, en général, de cette propriété de rester sur la même sphère pour les six positions considérées du système. Si B est un point de k^6_{14}, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 seront sur une sphère ; B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 également ; mais, B_1, B_2, B_3, B_4 étant des points du même cercle, les deux sphères ne coïncideront pas en général.

Si A' est le centre d'une sphère répondant à un point A de k^{10}_{05}, A' sera l'intersection de cinq plans normaux ; par conséquent, A est également le point d'intersection des cinq plans normaux de A' dans le mouvement inverse; c'est-à-dire que A' est un point de la courbe $k^{10'}_{05}$ et A le centre de la sphère correspondante.

Il s'ensuit donc que :

Si l'on donne arbitrairement six positions du système, celui-ci contiendra une courbe du dixième ordre k^{10}_{05} dont les points restent sur une sphère pour les six positions de Σ. Les centres de ces sphères forment également une courbe gauche du dixième ordre $k^{10'}_{05}$. Les deux courbes se correspondent dans la transformation cubique qui relie les deux systèmes Σ et Σ'. Dans le mouvement inverse, les deux courbes échangent leur signification.

12. Ajoutons enfin une septième position Σ_6, et considérons la surface F^4_{26} dont les points ont la propriété de rester sur une sphère pour les positions A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Les trois surfaces F^4_{04}, F^4_{15}, F^4_{26} se coupent en soixante-quatre points.

Parmi ces soixante-quatre points, tous ceux qui ne sont pas sur k^6_{14} ou k^6_{25} sont donc sur une sphère dans sept de leurs

positions consécutives. Si, par contre, A est un point de k^6_{14}, les deux sphères qui contiennent A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ou A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 auront en commun les cinq points d'un cercle, et par conséquent seront, en général, différentes l'une de l'autre; et, pour des raisons analogues, il en sera de même pour les points de k^6_{25}.

Les surfaces F^4_{04} et F^4_{15} renferment toutes les deux la courbe k^6_{14}. Celle-ci coupe F^4_{26} en vingt-quatre points qui sont sur les trois surfaces. De même F^4_{15} et F^4_{26} contiennent la courbe k^6_{25}; leurs vingt-quatre points d'intersection avec F^4_{04} font également partie des soixante-quatre points d'intersection des trois surfaces. Mais k^6_{14} et k^6_{25} ont, en commun, quatre points imaginaires; chacun d'eux est donc aussi bien l'un des points d'intersection de k^6_{14} avec F^4_{26}, qu'un des points d'intersection de k^6_{26} avec F^4_{04}. Les deux groupes de vingt-quatre points chacun ne forment donc, en général, que quarante-quatre points distincts; il reste donc vingt des soixante-quatre points d'intersection qui ne sont ni sur k^6_{14}, ni sur k^6_{25}, et il s'ensuit que :

Si l'on donne sept positions du système, il existe, en général, vingt points A *qui sont sur une même sphère pour les sept positions du système.*

Ces vingt points sont, en même temps, les points d'intersection des courbes k^{10}_{05} et k^{10}_{16}. Tout point du système invariable qui est forcé de se mouvoir sur une sphère fait partie de ces points.

Il existe également vingt points de cette espèce pour le mouvement inverse. Les vingt points de Σ et les vingt points de Σ' se correspondent dans la transformation cubique. Chacun de ces points A' est le centre de la sphère correspondant au point A; de même A est le centre de la sphère sur laquelle se meut A' dans le mouvement inverse.

13. Si enfin nous passons encore au cas de positions infiniment voisines du système, la sphère passant par A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 deviendra une sphère osculatrice stationnaire de la trajectoire de A, laquelle sphère contient cinq positions infiniment voisines de A. Nous arrivons donc au théorème suivant :

Si un système invariable se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, il existe, à chaque instant, une infinité de points dont les trajectoires ont un contact du quatrième ordre avec leurs sphères osculatrices. Ces points forment une surface du quatrième ordre F^4. *Les centres de ces sphères osculatrices forment également une surface du quatrième ordre* $F^{4'}$.

Sur la surface F^4, *il existe une courbe du dixième ordre* k^{10} *dont les points décrivent des trajectoires ayant avec leur sphère osculatrice un contact du cinquième ordre. Les centres de ces sphères forment également une courbe du dixième ordre* $K^{10'}$ *qui est sur* $F^{4'}$. *Enfin, vingt points* A *de la surface sont tels que leurs trajectoires ont avec leurs sphères osculatrices un contact du sixième ordre. Les centres de ces sphères sont sur la courbe* $K^{10'}$. *Les surfaces* F^4 *et* $F^{4'}$, *ainsi que les courbes* k^{10} *et* $k^{10'}$ *et les points* A *et* A', *sont des éléments correspondants dans la transformation cubique qui lie les deux espaces* Σ *et* Σ'. *Dans le mouvement inverse, les surfaces, les courbes et les points échangent leurs significations.*

L'enveloppe de toutes les surfaces F^4 qui correspondent aux différentes positions de Σ se décompose encore en deux surfaces de caractère cinématique différent. L'une d'elles est le lieu de toutes les courbes k^6 et contient les points de Σ dont les trajectoires ont, au cours du mouvement, un cercle de courbure stationnaire ; l'autre est le lieu des courbes k^{10} et se compose des points du système dont les trajectoires ont un contact du cinquième ordre avec leurs sphères osculatrices. Sur cette surface, il existe d'ailleurs une courbe, lieu des points qui décrivent des trajectoires ayant avec leurs sphères osculatrices un contact du sixième ordre : c'est l'enveloppe de toutes les courbes k^{10}.

Les éléments essentiels qui servent à la détermination de la trajectoire d'un point A du système sont la tangente, le plan osculateur, le plan normal, l'axe de courbure et la sphère osculatrice.

Il ne peut pas, en général, y avoir de point dont la trajectoire ait un plan normal stationnaire ; car il n'existe pas de point du système qui se trouve en repos à un instant

quelconque. Il s'ensuit que, dans ce qui précède, nous avons résolu la question qui consiste à déterminer le lieu des points dont les trajectoires ont, à un instant quelconque, des propriétés stationnaires.

X. — Des degrés de liberté dans le mouvement.

1. Jusqu'ici nous avons toujours supposé que le système à trois dimensions exécutait un mouvement déterminé et que chaque point décrivait, au cours du mouvement, une courbe déterminée. Si donc Σ_0 est une des positions de Σ, le système ne pourra quitter cette position qu'en subissant un déplacement bien déterminé, qui est un mouvement hélicoïdal infiniment petit autour d'un certain axe.

Il est visible que l'on peut se donner des conditions telles, qu'il y ait possibilité pour le système de se déplacer de différentes manières à partir de la position Σ_0. Si, par exemple, le système est tel que l'un de ses points soit fixe, mais qu'il ne soit soumis à aucune autre condition restrictive, il pourra exécuter un nombre doublement infini de mouvements, car toute rotation autour d'un axe passant par O en fait partie.

Suivant la variété des mouvements que peut prendre un système à partir d'une position quelconque, on parlera d'un degré de liberté plus ou moins grand dans le mouvement. Si le système est immobile, on dira que ce degré est zéro ; s'il ne peut se déplacer que d'une façon, on dira qu'il possède le premier degré de liberté dans le mouvement ; si, à partir de Σ_0, il peut prendre un nombre simplement infini de mouvements, ce sera le second degré de liberté, etc. [1].

2. Nous nous proposons d'établir ici les principaux théo-

---

[1] Les premières recherches sur les degrés de liberté dans le mouvement ont été faites par SCHONEMANN, *Monatsber. der Berliner Acad.*; 1855, et *Journal f. Math.*, t. XC, p. 44). Les théorèmes de Schonemann furent retrouvés par Mannheim : *Étude sur le dépl. d'une figure de forme invariable* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 43, p. 77). C'est Ball qui, le premier, donna une étude détaillée des six degrés de liberté (*Transactions of the R. Irish Acad.*, t. XXV, p. 183. *Voir* aussi HALPHEN, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. II).

rèmes qui concernent la liberté du mouvement d'un système. Nous avons déjà démontré plus haut qu'il ne peut exécuter qu'un seul mouvement si l'on donne à chaque instant cinq des rayons du complexe linéaire qui caractérise le déplacement ; c'est alors le premier degré de liberté. Soient l, m, n, p, q cinq rayons du complexe. Chacun d'eux jouit de la propriété d'être normal à la trajectoire de chacun de ses points. Si donc L, M, N, P, Q sont des points quelconques sur l, m, n, p, q, la trajectoire de L sera sur une surface qui a l pour normale; de même pour M, etc. Il nous est donc permis de nous donner à chaque instant cinq surfaces sur chacune desquelles doit se mouvoir un point du système; il s'ensuit que :

Tous les points d'un système Σ décrivent des trajectoires déterminées dès que cinq d'entre eux sont assujettis à rester chacun sur une surface donnée. Le degré de liberté du système est le premier.

On peut modifier de bien des manières cette condition imposée à cinq points de se déplacer sur cinq surfaces. Au lieu, par exemple, de dire qu'un point A de Σ se meut sur une surface Φ'_a, on peut aussi prescrire qu'une surface $\Phi_{(b)}$ de Σ passe toujours par un point fixe B'. Car, dans le mouvement inverse, le point B' de Σ' restera toujours sur une surface $\Phi_{(b)}$. Les deux conditions sont donc équivalentes. De même, nous pouvons convenir qu'une surface $\Phi_{(a)}$, appartenant au système Σ, sera constamment tangente à une surface $\Phi'_{(a)}$ de l'espace fixe, car cette condition revient à dire que la normale commune aux deux surfaces est en même temps normale à la trajectoire du point de contact.

Comme les droites l, m, n, p, q ne sont soumises qu'à la condition de faire partie d'un complexe linéaire, nous pourrons admettre que deux d'entre elles, l et m, par exemple, se coupent. Mais L et M étaient des points quelconques de l et m; faisons-les coïncider tous deux avec le point d'intersection (lm), on aura ainsi déterminé deux normales en ce point. Le point (lm) décrit donc, à l'instant considéré, un élément déterminé de courbe.

Si donc nous prescrivons qu'un point du système décrira

une certaine courbe, cela est équivalent à l'obligation pour deux points de se mouvoir sur des surfaces. La même chose aura lieu pour la condition que l'on impose à une courbe du système, une droite, par exemple, de passer par un point fixe.

3. Si, à chaque instant, on ne donne que quatre rayons du complexe, c'est-à-dire les normales aux trajectoires de quatre points du système, il n'y aura que quatre points assujettis à rester sur des surfaces données et le mouvement du système n'est plus déterminé.

En effet, si l, m, n, p sont les normales momentanées aux quatre points L, M, N, P, la normale à la trajectoire d'un cinquième point Q peut encore être prise arbitrairement, et ce n'est qu'une fois ceci fait que tout point Σ décrira, à partir de la position considérée, un élément de courbe. Comme q est quelconque, il s'ensuit que, si quatre points du système sont assujettis à rester sur des surfaces fixes, il existe encore la possibilité d'une infinité de mouvements dans lesquels chaque point décrit une trajectoire.

Dans tous ces mouvements, l, m, n, p restent des normales, et les droites g et g^{v} qui rencontrent l, m, n, p sont des droites conjuguées. C'est pourquoi, toute droite qui coupe g et g^{v} est normale aux trajectoires de ses points pour tous les mouvements possibles. L'ensemble de ces droites forme un système de rayons du premier ordre et de la première classe qui a g et g^{v} pour rayons directeurs, et qui est complètement déterminé par les quatre rayons l, m, n, p.

Par le point Q, il passe un rayon s du système; quelle que soit donc la manière dont l'on choisira la normale q à la trajectoire Q, le plan normal $[qs]$ renfermera toujours la droite s.

Donc, pour tous les mouvements possibles que peut exécuter Σ à l'instant considéré, le point Q restera sur une surface dont la normale est s. Cela a lieu pour toute position du système.

Ainsi, lorsque quatre points du système sont assujettis à rester sur des surfaces fixes, chaque point Q du système décrira une surface. Cette surface prendra le nom de *surface trajectoire* du point Q. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Si quatre points du système sont assujettis à rester sur des surfaces fixes, cela aura lieu pour chaque point. Les normales aux surfaces trajectoires des points de Σ forment, pour chaque position du système, un système de rayons déterminé par les normales des quatre points, et, par conséquent, rencontrent toutes deux droites fixes.

4. Dans la position du système pour laquelle ces droites sont g et $g^\vee$, le théorème n'est pas applicable aux points de ces droites $\varkappa$. Tous leurs points se font en effet remarquer par ceci : c'est que, par chacun d'eux, il passe une infinité de rayons du système, c'est-à-dire de normales, qui forment un faisceau de rayons. Quelle que soit la manière dont on choisisse la normale q d'un cinquième point Q, les points de g et de $g^\vee$ auront toujours chacun le même plan normal, qui est le plan de ce faisceau. Le plan normal de tout point de g passe par $g^\vee$, et le plan normal de tout point de $g^\vee$ passe par g; c'est-à-dire que dans tout mouvement admissible de Σ, g tourne autour de $g^\vee$ et $g^\vee$ autour de g. Il s'ensuit que :

Si Σ_0 est une position quelconque de Σ, et g et $g^\vee$ les droites rencontrées par toutes les normales du système, les points de g et $g^\vee$ ne peuvent se déplacer que sur des courbes à partir de Σ_0. Chacune des deux droites tourne autour de l'autre.

Si donc A est un point quelconque de g ou de $g^\vee$, sa surface trajectoire présentera, en général, pour la position considérée, un nœud biplanaire. Si un point de Σ est sur une telle droite pour toute position du système, il décrira une courbe pendant tout le cours du mouvement.

5. Les théorèmes précédents sont susceptibles d'un autre mode d'exposition qui reste applicable même lorsque g et $g^\vee$ sont imaginaires. Le mouvement de Σ dans lequel tout point décrit une courbe est, en général, défini à chaque instant par un complexe linéaire, et cela de telle façon, que tous les rayons du complexe qui passent par un point quelconque Q de Σ forment le plan normal de Q. Soit maintenant donnée une position quelconque de Σ, nous considérons tous les complexes qui ont en commun les

quatre rayons l, m, n, p et, par suite, le système de rayons que déterminent ces quatre droites. Chacun de ces complexes définit un mouvement de Σ au cours duquel Q décrit une courbe déterminée. Mais, pour toutes ces courbes, le rayon q du système de rayons qui passe par Q est une normale à la trajectoire de Q. Les tangentes à toutes les trajectoires de Q sont donc dans le plan tangent à une surface quelconque qui admet q comme normale, c'est-à-dire que, dans tous les mouvements de Σ qui sont possibles, l, m, n, p étant des rayons normaux, le point Q se déplacera, à l'instant considéré, sur une surface admettant q comme normale.

Comme, à partir de la position Σ_0, le système peut exécuter un nombre simplement infini de mouvements, on dit que son degré de liberté est du *second ordre*.

En nous servant de cette dénomination, nous pourrons déduire le théorème suivant de ce qui précède :

Si le degré de liberté que possède un système est du second ordre, les plans normaux aux trajectoires d'un point Q *qui n'est ni sur g ni sur g^{v} forment un faisceau de plans, et les tangentes à ces trajectoires un faisceau de rayons, et cela pour tous les déplacements possibles.*

Si ε est un plan quelconque de Σ qui ne passe ni par g ni par g^{v}, il renfermera toujours un rayon s du système de rayons, qui est la ligne de jonction des points où ε est coupé par g et g^{v}. Le foyer de ε sera donc sur s pour tous les déplacements admissibles. Si, de plus, nous projetons les deux droites g et g^{v} sur ε, le point de rencontre des deux projections est un point de la caractéristique de ε (VI, 3), et il s'ensuit que :

Dans toute position du système, les foyers d'un plan ε sont sur une droite pour tous les déplacements possibles, et leurs caractéristiques forment un faisceau plan de rayons.

6. Toutes les droites d'un système de rayons qui rencontrent une certaine droite h forment, en général, un hyperboloïde ; cela a donc lieu aussi pour les normales aux surfaces trajectoires des points d'une droite h de Σ. Soit, maintenant, ε un plan quelconque perpendiculaire sur h, il y a deux plans

tangents à l'hyperboloïde qui passent par la droite à l'infini sur ε, c'est-à-dire qui sont perpendiculaires sur h.

Chacun d'eux contient une droite appartenant au système de génératrices formé par les normales. Il existe donc deux points de h pour lesquels les normales sont perpendiculaires sur h ; cette droite est donc dans le plan tangent aux surfaces trajectoires, et il s'ensuit que :

Les normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite h forment, en général, un hyperboloïde. Il existe, en général, deux surfaces trajectoires admettant h comme tangente.

7. Pour déterminer la surface formée par les plans tangents à toutes les surfaces trajectoires, imaginons que Σ commence à se déplacer suivant deux des manières possibles. Dans chacun de ces déplacements, les tangentes aux trajectoires des points Q de h forment un des systèmes de génératrices d'un paraboloïde, perspectif avec la ponctuelle h. Les deux tangentes aux trajectoires de Q nous fournissent le plan tangent à la surface trajectoire de Q. L'ensemble de ces plans forme un faisceau de plans du troisième ordre qui contient le plan de l'infini. Comme h ne touche que deux surfaces trajectoires, il n'y a que deux plans de ce faisceau qui passent par h, c'est-à-dire que h est un axe du faisceau de plans. Il s'ensuit que :

Les plans tangents aux surfaces trajectoires de tous les points de h forment un faisceau de plans du troisième ordre qui renferme le plan de l'infini. La droite h est un axe de ce faisceau.

8. Le second système de génératrices de l'hyperboloïde dont il a été question plus haut est formé par des droites qui rencontrent les normales aux surfaces trajectoires de tous les points de h. Chacune d'elles doit donc être conjuguée de h pour l'un des mouvements possibles du système. En effet, pour tout mouvement que peut prendre h, les normales de tous ses points passent par une même droite : donc cette droite est sur l'hyperboloïde; de même l'inverse est vrai. On peut énoncer ce fait de la manière suivante :

Toutes les droites conjuguées d'une droite h de Σ par rapport à tous les mouvements possibles, forment l'un des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde. L'autre système de génératrices est composé des normales aux surfaces trajectoires des points de h.

Comme l'hyperboloïde contient g, g^v et h, il existe un mouvement possible, pour lequel h est autoconjuguée, de même un mouvement où h est conjuguée à g, un autre où elle est conjuguée à g^v.

9. A chaque mouvement que peut prendre le système Σ à partir de la position Σ_0, correspond un complexe linéaire. Son axe principal est l'axe du mouvement hélicoïdal infiniment petit que définit ce complexe. On doit se demander quelles sont les propriétés de l'ensemble de ces axes principaux, c'est-à-dire des axes des mouvements hélicoïdaux infiniment petits que peut exécuter le système Σ à partir de la position Σ_0.

L'ensemble de ces axes instantanés est identique, au point de vue géométrique, avec les axes principaux de tous les complexes linéaires qui contiennent les quatre normales l, m, n, p, ou le système de rayons que déterminent ces normales.

Nous désignerons les deux droites qui sont rencontrées par l, m, n, p et qui, par conséquent, sont des droites conjuguées pour tous les mouvements de Σ par g et g^v, et k sera leur perpendiculaire commune. Si x est un des axes instantanés, x sera perpendiculaire sur k (IV, 4). De plus, les droites du système de rayons qui rencontrent x forment un paraboloïde équilatère, car tout rayon normal qui rencontre x est perpendiculaire sur cette droite.

Soit maintenant ε un plan quelconque qui passe par g, et soit E son point d'intersection avec g^v. Le plan contient une infinité de rayons s du système de rayons qui forment un faisceau dont le centre est E et coupe le paraboloïde suivant un seul rayon de ce faisceau passant par E. L'axe instantané peut donc être défini comme étant une droite perpendiculaire à la fois sur x et sur le rayon s que nous venons de déterminer. Cela a lieu pour tout axe instantané. Inversement,

il faut que tout axe qui est perpendiculaire sur k et sur un rayon normal s soit un axe principal du complexe linéaire, c'est-à-dire un axe instantané ; car, si X est le point d'intersection de x et de s, et que t soit une droite passant par X et perpendiculaire à x, il existera toujours un complexe linéaire, et un seul, dont feront partie les cinq rayons l, m, n, p, t. Mais ce complexe jouit de la propriété que g et g^v sont deux droites conjuguées et que x est son axe principal.

10. Nous obtiendrons, par suite, tous les axes instantanés en construisant toutes les droites qui sont perpendiculaires à la fois sur k et sur un rayon s du faisceau situé dans ε. Pour obtenir la perpendiculaire commune à k et à s, nous construisons un plan quelconque parallèle à ces deux droites; puis par k et s nous mènerons deux plans $\varkappa$ et σ perpendiculaires sur ce premier plan. L'intersection de ces deux plans $\varkappa$ et σ nous fournit la perpendiculaire commune cherchée.

Si maintenant K est un point quelconque de k, menons par K des rayons s' parallèles à s ; alors les plans $[ks']$ formeront un faisceau de plans projectif aux rayons s, et chacun de ces plans est un plan $\varkappa$. De plus, par le centre E du faisceau de rayons, menons une droite k' parallèle à k, les plans $[k's]$ formeront un faisceau de plans perspectif au faisceau de rayons. Menons maintenant par s un plan perpendiculaire au plan $[k's]$: ce sera un plan σ, et l'ensemble de ces plans enveloppe un cône du second ordre, qui est le cône complémentaire d'un cône orthogonal. L'ensemble des plans σ forme donc un faisceau de plans du second ordre perspectif avec le faisceau de rayons s.

Le faisceau de plans du premier ordre formé par les plans $\varkappa$, et le faisceau de plans du second ordre formé par les plans σ, engendrent la surface des axes instantanés ; celle-ci est donc du troisième ordre, et admet la droite k comme droite double.

Les droites g et g^v sont également sur la surface ; car, si nous considérons encore le plan ε et le faisceau de rayons qu'il contient, et dont le sommet E est sur g^v, il existera toujours un rayon du faisceau qui est perpendiculaire sur g^v.

C'est pourquoi g^{v} jouit de la propriété d'être perpendiculaire sur k et sur un rayon s. La même chose a lieu pour g. Il s'ensuit donc que :

Pour toute position du système Σ, l'ensemble des axes instantanés correspondant aux mouvements possibles forme une surface réglée du troisième ordre, qui contient g et g^{v}, et qui a, comme droite double, la perpendiculaire commune à g et g^{v}. Tous les axes instantanés sont perpendiculaires sur cette droite double.

On désignera cette surface sous le nom de *cylindroïde* (conoïde de Plücker). On peut la définir d'une manière purement géométrique, comme étant la surface lieu des axes principaux de tous les complexes linéaires qui ont en commun le même système de rayons de la première classe et du premier ordre [1].

11. Le plan ε qui passe par g et rencontre g^{v} en E coupe encore la surface suivant une conique; cette conique est formée par les points suivant lesquels les rayons s du faisceau situé dans ε sont rencontrés par les droites x de la surface, lesquelles sont perpendiculaires sur ces rayons. Projetons la section conique, le faisceau de rayons, et les droites x de la surface sur plan η perpendiculaire à k. Si s_1 est la projection d'un rayon quelconque s et x_1 la projection de la droite x qui est perpendiculaire sur ce rayon, s_1 et x_1 seront également perpendiculaires l'une sur l'autre. Tous les rayons s_1 passent par la projection E_1 du point E, toutes les droites x_1 passent par le point d'intersection H_1 de k et de η.

Les points s_1, x_1 forment, par conséquent, un cercle dont le diamètre est la ligne H_1E_1, et ce cercle est la projection de la conique que ε a en commun avec la surface. Mais g ne diffère pas des autres droites de la surface; de plus, chaque plan qui contient une droite du cylindroïde est un plan tan-

---

[1] La signification cinématique du cylindroïde fut reconnue par Ball (*Transactions of the Royal Irish Acad.*, t. XXV, p. 161). La dénomination de cylindroïde vient de Cayley.

gent de la surface ; nous arrivons donc au théorème suivant :

Tout plan tangent au cylindroïde a en commun avec lui une ellipse, en dehors de la droite de contact. La projection de cette ellipse sur un plan perpendiculaire à la droite double est un cercle qui passe par un point de la droite double.

12. Nous avons déjà fait remarquer que toutes les droites du système de rayons qui rencontrent une droite x du cylindroïde forment un paraboloïde équilatère, c'est-à-dire que chacune d'elles est perpendiculaire sur x; mais chacun de ces rayons est normal à la surface trajectoire du point où il rencontre x, par suite x est tangent à cette surface. Tandis donc qu'une droite quelconque du système Σ n'est tangente qu'aux surfaces trajectoires de deux de ses points, toute droite x est tangente aux trajectoires de tous ses points. Comme les normales à toutes les surfaces trajectoires forment un paraboloïde équilatère, les plans tangents formeront un faisceau de plans dont l'axe est x. Nous arrivons ainsi à une nouvelle propriété cinématique du cylindroïde :

Chaque droite x du cylindroïde est tangente aux surfaces trajectoires de tous ses points. Les plans tangents à toutes ces surfaces forment un faisceau de plans dont l'axe est x.

13. Si l'on ne donne que trois normales pour déterminer le mouvement du système, si donc on se donne pour une position quelconque Σ_0 les droites l, m, n, rayons normaux de trois points L, M, N, Σ pourra, à partir de la position Σ_0, exécuter tous les mouvements pour lesquels le complexe caractéristique contient les trois rayons l, m, n; mais, si un complexe linéaire contient les droites l, m, n, toutes les droites du système réglé R^2 déterminé par l, m, n appartiennent au complexe.

Les génératrices R^2 seront donc des rayons normaux pour tous les mouvements possibles de Σ. Si donc A est un point quelconque de R^2, la génératrice q qui passe par ce point est normale à sa trajectoire pour tous les mouvements possibles; mais, si A est un point quelconque du système Σ, nous

pourrons définir un des mouvements de Σ en nous donnant encore deux droites quelconques a et b passant par A, comme droites du complexe ; avec l, m, n, elles détermineront un complexe linéaire, par conséquent, un mouvement déterminé de Σ. Le plan $[ab]$ est le plan normal du point A, et, comme a et b ont été pris tout à fait arbitrairement, on peut choisir tout plan passant par A comme plan normal de ce point. Le point A peut, par suite, se mouvoir dans toutes les directions ; il s'ensuit que :

Si trois points L, M, N *du système sont forcés de rester sur des surfaces fixes, et si* Σ_0 *est une position quelconque de* Σ, *un autre point du système pourra se déplacer à partir de sa position actuelle, dans une direction quelconque. Il faut en excepter les points appartenant au système réglé que déterminent* l, m, n, *normales des points* L, M, N. *Chacun d'eux reste sur une surface ; la normale à cette surface est la génératrice du système réglé qui passe par le point.*

On dit, dans ce cas, que la liberté dont jouit le système est du *troisième degré*.

14. Si g et h sont deux droites du second système de génératrices de l'hyperboloïde déterminé par l, m, n, et si p est une droite quelconque, non située sur cet hyperboloïde, qui rencontre g et h, l, m, n, p seront des rayons normaux pour un nombre infini de mouvements de Σ. Les droites g et h seront des droites conjuguées pour tous ces mouvements.

Il s'ensuit donc que :

Deux droites g *et* h *du second système de génératrices de l'hyperboloïde déterminé par* l, m, n *sont des droites conjuguées pour un nombre infini de déplacements possibles que peut subir le système à partir de la position* Σ_0. *Dans tous ces mouvements, chaque point de* Σ *décrit des éléments de trajectoires qui sont chacun sur une surface fixe.*

15. Si l'on ne se donne que deux rayons normaux, l et m, on dit que le système possède le quatrième degré de liberté. Dans chaque position Σ_0 le système peut se déplacer suivant

un nombre triplement infini de manières. Tous les points des deux rayons normaux sont forcés de rester sur des surfaces fixes. Les rayons l et m déterminent un système de rayons dont ils sont les rayons directeurs. Deux droites g et h de ce système peuvent être considérées comme des droites conjuguées pour une infinité de mouvements.

Si l'on ne donne qu'un rayon l, le système possède le cinquième degré de liberté ; à partir de chaque position Σ_0, il pourra se déplacer suivant un nombre quadruplement infini de manières; mais les points de l restent pendant tous ces mouvements sur une surface. Deux droites qui rencontrent l sont conjuguées dans une infinité de déplacements de Σ.

Enfin, si le système est complètement libre, on dit que son degré de liberté est le sixième. Pour ce cas, nous arrivons à cette conclusion, que deux droites quelconques de l'espace peuvent être choisies comme droites conjuguées, et qu'alors il y a encore place pour une infinité de déplacements.

XI. — Relations métriques.

1. Dans ce qui suit, nous considérerons encore deux positions du système choisies arbitrairement et le mouvement hélicoïdal qui leur correspond.

La position particulière qu'occupe l'axe de ce mouvement par rapport aux systèmes Σ_0 et Σ_1 donne naissance à une série de formules et de relations métriques qui relient entre eux les éléments correspondants des deux espaces. On va en développer quelques-unes ; elles se déduisent, pour la plupart, des propriétés géométriques du mouvement hélicoïdal.

Deux points correspondants A_0, A_1 sont à égale distance de l'axe du déplacement ; les perpendiculaires abaissées de A_0 et A_1 sur cette droite la rencontrent en des points correspondants X_0 et X_1, et les plans qui passent par A_0 et x d'une part, par A_1 et x de l'autre, sont des plans correspondants α_0 et α_1. L'angle que α_0 et α_1 font entre eux nous donne la quantité dont a tourné le système, tandis que la longueur X_0X_1 est égale à la composante de translation du mouvement. On peut mettre ce dernier résultat de la manière suivante sous forme d'un théorème :

Les projections de toutes les cordes sur l'axe du déplacement sont égales entre elles, et égales à la composante de glissement.

Soit A_m le milieu de la corde A_0A_1, le plan α^{v} mené par A^m rencontre l'axe x au point X^m, et A^mX^m est perpendiculaire sur x.

Fig. 17.

Nous désignerons par r la distance de A^m à x, c'est-à-dire la longueur A^mX^m. L'angle de rotation sera 2Ω, et le glissement correspondant $2U$.

Projetons maintenant (*fig.* 17) A_0 et A_1 sur le plan passant par A_mX_m et perpendiculaire à x, et soient $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ les projections de ces points, on aura

$$\wedge(\mathcal{A}_0 X^m \mathcal{A}_1) = 2\Omega$$

et

$$A_0\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 A_1 = U.$$

Donc, le triangle $A^m\mathcal{A}_1A_1$ nous fournira les deux relations

$$(1) \qquad \left(\tfrac{1}{2}\overline{A_0A_1}\right)^2 = r^2\operatorname{tang}^2\Omega + U^2,$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\left(\overline{A_0A_1}, x\right) = r\operatorname{tang}\Omega : U.$$

2. Deux droites correspondantes g_0 et g_1 sont à égale distance de l'axe du déplacement et font des angles égaux avec lui. Les deux points de x qui sont les plus rapprochés de g_0 et g_1 sont deux points correspondants X_0 et X_1; de même, les points de g_0 et g_1 pour lesquels la distance à x est minimum sont des points correspondants G_0 et G_1 de ces droites. La longueur X_0X_1 donne encore la composante de glissement, pendant que l'angle des droites X_0G_0 et X_1G_1 détermine l'angle de rotation.

Soit g^m la médiane pour g_0 et g_1. Par un point O de x, nous mènerons trois droites $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}^m$ parallèles à g_0, g_1, g^m. Comme g_0, g_1, g^m sont trois génératrices d'un paraboloïde, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}^m$ sont dans un même plan, et comme g^m fait des angles égaux avec g_0 et g_1 (I, 4), $\mathfrak{g}^m$ bissecte l'angle $(\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_1)$.

De plus, l'angle des deux plans $[x\mathfrak{g}_0]$, $[x\mathfrak{g}_1]$ est l'angle de rotation 2Ω; nous avons donc

$$\sin(\tfrac{1}{2}\mathfrak{g}_0\mathfrak{g}_1) = \sin\Omega \ \sin(\mathfrak{g}_0 x),$$
$$\operatorname{tang}(\mathfrak{g}^m x) = \cos\Omega \operatorname{tang}(\mathfrak{g}_0 x),$$

et, par suite,

(3) $$\sin[\tfrac{1}{2}(g_0 g_1)] = \sin\Omega \ \sin(g_0 x),$$

(4) $$\operatorname{tang}(g^m x) = \cos\Omega \operatorname{tang}(g_0 x).$$

Ces équations montrent que les angles $(g_0 g_1)$ et $(g^m x)$ ne dépendent que de Ω et de l'angle $(g_0 x)$. Ils ont donc la même valeur pour toutes les droites de Σ qui sont parallèles entre elles.

3. La perpendiculaire commune k à g^m et g^v jouit de la propriété de couper l'axe x et d'être perpendiculaire sur cette droite (V, 4). Elle rencontre g^m au point G^m qui correspond à G_0 et G_1, et x au point X^m.

Soit G^v son point d'intersection avec g^v, et désignons de plus la longueur $G^m X^m$ par r, et $G^v X^m$ par ρ.

Les points G^m et G^v peuvent être situés tout aussi bien du même côté, par rapport à X^m, que de côtés différents. Aussi longtemps qu'il ne s'agira, comme ici, que d'un couple de droites conjuguées, il sera permis de regarder toujours r comme étant positif. Mais nous conviendrons que les directions positives de r et de ρ sont opposées ; c'est-à-dire que ρ devra être considéré comme positif lorsque G^m et G^v sont de côtés différents par rapport à X^m, et comme négatif quand ils seront du même côté. Dans ces conditions, la valeur de $G^m G^v$ sera toujours égale à $r+\rho$.

Il reste aussi à fixer le signe des angles que g^m et g^v font avec x. Il nous est encore permis de considérer toujours l'angle de g^m avec x comme étant positif. Si maintenant, par un point quelconque de x, nous menons des parallèles $\mathfrak{g}^m$ et $\mathfrak{g}^v$ à g^m et g^v, l'angle de g^v avec x sera considéré comme positif, si x est entre $\mathfrak{g}^m$ et $\mathfrak{g}^v$, et négatif si cela n'a pas lieu. Dans cette hypothèse, $\wedge(g^m g^v)$ sera toujours égal à la somme des angles que g^m et g^v font avec x.

4. Comme k est un rayon du complexe linéaire, qui appartient au système focal formé par Σ^m et Σ^v, k est perpendiculaire sur la corde G_0G^m du point G^m. Si, par X^m, nous menons des parallèles à g^v et à la corde G_0G_1, ces droites seront dans un même plan avec x, et il s'ensuit que les angles que la corde et g^v font avec x sont complémentaires. Si nous appliquons maintenant l'équation (2) au point G^m, il s'ensuivra, comme

$$\operatorname{tang}(G_0G_1, x) = \operatorname{ctg}(g^v x):$$

$$(5) \qquad r \operatorname{tang}(g^v x) = U : \operatorname{tang}\Omega.$$

Mais g^m et g^v sont des droites conjuguées du système focal; c'est-à-dire que g^m est l'intersection des plans normaux de tous les points de g^v, si nous considérons g^v comme étant une droite h^m de Σ^m.

Par conséquent, on a aussi

$$\rho \operatorname{tang}(g^m x) = U : \operatorname{tang}\Omega;$$

il s'ensuit

$$(6) \qquad r : \rho = \operatorname{tang}(g^m x) : \operatorname{tang}(g^v x).$$

Les dernières équations peuvent être appliquées aux droites g_0 et g_1 elles-mêmes. Désignons, en effet, par r_0 la distance de g_0 à x, c'est-à-dire la longueur G_0X_0, on a

$$r = r_0 \cos\Omega.$$

Des équations (4) et (5), on déduit alors

$$(7) \qquad r_0 \operatorname{tang}(g^v x) = \rho \operatorname{tang}(g_0 x) = U : \sin\Omega,$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad r_0 : \rho = \operatorname{tang}(g_0 x) : \operatorname{tang}(g^v x).$$

De sorte que, finalement, les formules (6) et (8) nous donnent le résultat suivant

$$(9) \qquad r_0 : r : \rho = \operatorname{tang}(g_0 x) : \operatorname{tang}(g^m x) : \operatorname{tang}(g^v x).$$

Il s'ensuit donc que :

Les distances à l'axe du déplacement d'une droite quelconque du système, de sa médiane et de la droite conjuguée, sont entre elles comme les tangentes trigonométriques des angles que ces droites font avec l'axe.

Il a été démontré plus haut (I, 4) que les projections de toutes les cordes des points de la droite g sur g''' ont une longueur constante. Pour en obtenir la valeur, il nous suffira donc de considérer la corde d'un quelconque des points de g; nous choisirons la corde G_0G_1 du point G'''.

Imaginons que nous ayons dessiné, pour la corde G_0G_1, la même figure que celle qui a été tracée pour la droite A_0A_1, et appelons maintenant $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_1$ les points analogues à $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$. La projection de la demi-corde $G'''G_1$ est égale à la projection du contour $G'''\mathcal{G}_1G_1$. Mais, comme g''' est dans le plan $G'''\mathcal{G}_1G_1$, la projection de $G'''\mathcal{G}_1$ sur g''' a pour valeur

$$G_m\mathcal{G}_1 \sin(g'''x),$$

et celle de $\mathcal{G}_1G_1$ est égale à

$$\mathcal{G}_1G_1 \cos(g'''x).$$

Par conséquent, nous obtenons, pour la valeur de la projection de la demi-corde sur g''', l'expression

$$(10) \qquad r \operatorname{tang}\Omega \sin(g'''x) + U \cos(g'''x).$$

Ceci représente donc la valeur de la projection d'une corde *quelconque* de g sur g'''.

5. Deux plans correspondants ε_0 et ε_1 font des angles égaux avec l'axe du mouvement hélicoïdal, et les points où ils rencontrent cet axe sont deux points correspondants X_0 et X_1.

Les projections de x sur ε_0 et ε_1 sont deux droites correspondantes p_0 et p_1 des deux plans. La longueur X_0X_1 donne encore la composante de glissement, pendant que les plans $[xp_0]$ et $[xp_1]$ déterminent l'angle de rotation.

Imaginons une droite quelconque g_0, perpendiculaire sur ε_0, par exemple, celle qui passe par X_0, la droite correspon-

dante g_1 de Σ_1 sera aussi perpendiculaire sur ε_1, et passera par le point X_1. Mais l'équation (3) est applicable à g_0 et g_1, et

$$\wedge(g_0 g_1) = \wedge(\varepsilon_0 \varepsilon_1),$$
$$\sin(g_0 x) = \cos(\varepsilon_0 x);$$

il s'ensuit

$$\text{(11)} \qquad \sin(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1) = \sin\Omega\cos(\varepsilon_0 x).$$

L'angle de deux plans correspondants de Σ_0 et Σ_1 est donc maximum lorsque les plans passent par l'axe du déplacement hélicoïdal.

6. Le point où le plan médian ε^m rencontre x est le point X^m. De plus, on voit facilement que la projection de x sur ε^m est la médiane p^m de p_0 et p_1.

En effet, considérons d'abord les droites l_0 et l_1 de ε_0 et ε_1 qui passent par X_0 et X_1 et sont perpendiculaires à l'axe du déplacement, la droite l^m qui passe par X^m est également perpendiculaire à x. Mais les plans $[x l_0]$, $[x l_1]$, $[x l^m]$ sont des plans correspondants de Σ_0, Σ_1, Σ^m ; de plus, le faisceau de plans de Σ^m qui a x pour axe est congruent aux faisceaux de plans correspondants de Σ_0 et de Σ_1, par conséquent les plans perpendiculaires à $[x l_0]$, $[x l_1]$, $[x l^m]$, de ces trois faisceaux, sont aussi des plans correspondants. Mais, de là, il suit que p_0, p_1, p^m sont des droites correspondantes, car ce sont les droites d'intersection de ces trois plans avec les plans correspondants ε_0, ε_1, ε^m.

L'équation (4) a lieu aussi pour p_0 et p^m; mais les angles que ces droites font avec l'axe mesurent en même temps l'inclinaison de l'axe sur ε_0 et ε^m, et nous avons alors

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{tang}(\varepsilon^m x) = \cos\Omega \operatorname{tang}(\varepsilon_0 x).$$

L'angle que ε^m fait avec x est donc toujours plus petit que l'angle que fait ε_0 avec cette droite. Il faut en excepter le cas où ε passe par x ou lui est normal, car alors la même chose a lieu pour ε^m.

7. Nous faisons suivre ces considérations de la solution du problème qui consiste à construire l'axe du mouvement hé-

licoïdal lorsque deux positions arbitraires Σ_0 et Σ_1 du système sont données.

Soient alors A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 les positions correspondantes de trois points de Σ, il doit être possible, au moyen de ces données, de construire l'axe du déplacement.

La construction au moyen de laquelle on y arrive, indiquée par Chasles, est la suivante :

Par un point quelconque O de l'espace, menons les droites OA′, OB′, OC′ égales et parallèles aux longueurs A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1. Alors le plan A′B′C′ est perpendiculaire à l'axe du mouvement, car les projections de OA′, OB′, OC′ sur toute droite normale au plan A′B′C′ sont égales entre elles. Mais les plans ABC, $A_1B_1C_1$ font des angles égaux avec l'axe et le coupent en deux points correspondants X_0, X_1 ; si nous projetons alors les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sur le plan A′B′C′, ils détermineront deux systèmes plans congruents, et le point double X′ de ces systèmes coïncide avec la projection de X_0 et de X_1, c'est-à-dire que ce point appartient à l'axe du déplacement.

Si le cas se présentait où les cordes A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 sont parallèles au même plan, OA′, OB′, OC′ seraient dans un plan, et la construction indiquée ne serait plus applicable. Mais alors les plans normaux menés en A^m, B^m, C^m se coupent en un point à l'infini, par conséquent le plan $\varepsilon^m = [A^m B^m C^m]$ est le plan normal d'un point à l'infini, et, par suite, parallèle à l'axe du déplacement. Donc les plans $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ sont aussi parallèles à cet axe, et leur intersection donne la direction de x.

Nous arrivons à une seconde construction en nous servant des propriétés du système focal formé par Σ^m et Σ^v.

Posons en effet

$$(BC) = a, \qquad (CA) = b, \qquad (AB) = c.$$

Les plans normaux menés par B^m et C^m sur B_0B_1, C_0C_1 se couperont sur la droite a^v conjuguée à a^m ; et la droite k_a perpendiculaire commune à a^m et a^v rencontre l'axe du déplacement et lui est perpendiculaire. La même chose a lieu pour les droites b^m, b^v et leur perpendiculaire commune k_b, ainsi que pour c^m, c^v et k_c.

L'axe x est donc perpendiculaire sur k_a, k_b, k_c et peut être construit en déterminant une droite perpendiculaire sur deux de ces perpendiculaires communes. Cette construction a été également donnée par Chasles ([1]).

8. Transportons maintenant les résultats précédents au mouvement instantané d'un corps qui se déplace d'une manière quelconque dans l'espace ; les composantes de translation et de rotation deviendront infiniment petites, mais nous avons vu plus haut que le quotient $U:\Omega$ prend à chaque instant une valeur limite bien déterminée, qui est le paramètre du mouvement hélicoïdal instantané. Celui-ci sera, en général, fini et différent de zéro. Nous le désignerons par p.

Les grandeurs r et ρ se rapportent de nouveau au système focal formé par Σ et Σ^ν et représentent les distances de deux droites conjuguées g et g^ν à l'axe du déplacement.

Le plan ε^m vient à la limite coïncider avec ε, et la corde A_0A_1 devient la tangente à la trajectoire du point A.

Si nous la désignons par t, l'équation (2) nous donnera immédiatement

$$\tag{13} \operatorname{tang}(tx) = r:p.$$

Elle détermine la tangente à la trajectoire de chaque point si l'on connaît l'axe et le paramètre du mouvement instantané.

L'équation montre que l'angle (tx) augmente avec la distance du point à l'axe.

De plus, les équations (5) et (6) donnent

$$\tag{14} r \operatorname{tang}(g^\nu x) = \rho \operatorname{tang}(gx) = p$$

et

$$\tag{15} r:\rho = \operatorname{tang}(gx):\operatorname{tang}(g^\nu x),$$

c'est-à-dire que :

Les distances de deux droites conjuguées à l'axe du mou-

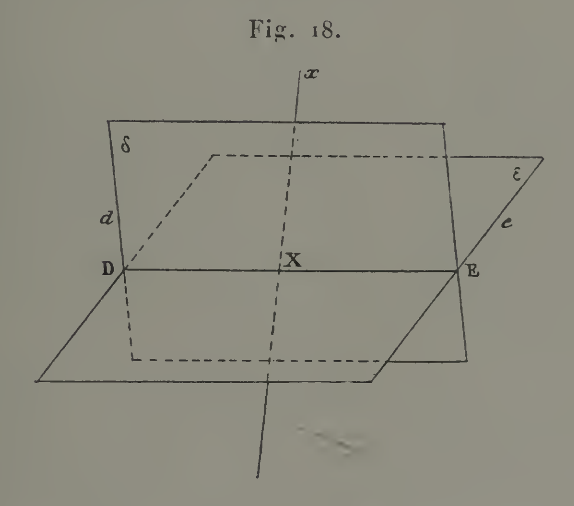
([1]) *Comptes rendus*, t. LII, p. 487.

vement hélicoïdal instantané sont entre elles comme les tangentes trigonométriques des angles que ces droites font avec l'axe.

9. Si, en particulier, les droites conjuguées sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si donc chacune d'elles est tangente à la trajectoire d'un point ou caractéristique d'un plan, on arrive encore à des relations plus simples. Nous désignerons, comme (VI) plus haut, deux droites conjuguées de cette espèce par d et e, et par δ et ε les plans dont elles sont les caractéristiques. D et E seront les points à la trajectoire desquels ces droites seront tangentes. Enfin le point où DE rencontre l'axe du déplacement sera X. Maintenant on a

$$\tang(dx)\tang(ex) = 1;$$

Fig. 18.



par conséquent l'équation (14) se transforme et devient

$$(16) \qquad \mathrm{DX}\cotg(dx) = \mathrm{EX}\cotg(ex) = p,$$

c'est-à-dire que :

Pour chaque droite de Σ qui est tangente à la trajectoire d'un point, le produit de sa distance à l'axe instantané par la cotangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe a une valeur constante. Celle-ci est égale au paramètre du mouvement hélicoïdal instantané.

Le point D est le foyer de ε et E est le foyer de δ; de plus, d est perpendiculaire sur ε et e sur δ : par conséquent

$$\operatorname{cotg}(dx) = \operatorname{tang}(\varepsilon x) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{cotg}(ex) = \operatorname{tang}(\delta x),$$

et il vient

$$(17) \qquad \mathrm{DX} \operatorname{tang}(\varepsilon x) = \mathrm{EX} \operatorname{tang}(\delta x) = p,$$

c'est-à-dire que :

Si ε est un plan quelconque de Σ, le produit de la distance à l'axe de son foyer par la tangente trigonométrique que le plan fait avec l'axe est une quantité constante, égale au paramètre du mouvement hélicoïdal instantané.

Enfin, nous mentionnerons encore l'équation

$$(18) \qquad \mathrm{DX}.\mathrm{EX} = p^2,$$

qui résulte immédiatement des autres.

Dans cette formule, DX et EX ont une double signification pour les plans δ et ε; on peut les considérer comme étant les distances de leurs foyers à l'axe instantané ou comme les distances de leurs caractéristiques à cet axe. Observons que les positions du foyer et de la caractéristique d'un plan ne dépendent que de l'angle que le plan fait avec x; nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Lorsque deux plans de Σ font avec l'axe instantané des angles complémentaires, le produit des distances de leurs foyers à l'axe est égal au produit des distances des caractéristiques. Ce produit est constant pour un pareil couple de plans, et égal au carré du paramètre du mouvement hélicoïdal instantané.

10. A l'aide du précédent théorème, nous sommes en état de nous créer une image nette de la position du foyer d'un plan et de sa caractéristique, ainsi que de la distribution des droites conjuguées dans l'espace. Toutefois, avant d'aller plus loin, il nous faut déterminer dans quels cas la distance d'une droite à l'axe, ainsi que l'angle qu'elle fait avec l'axe, devront être considérés comme positifs ou négatifs.

On peut faire les conventions suivantes : Si A est un point quelconque de Σ, et que l soit la perpendiculaire abaissée de A sur x, faisons passer par A un plan normal à l, et considérons dans ce plan le faisceau de rayons dont le centre est en A. La distance du point à x est en même temps la distance de toutes les droites g du faisceau à l'axe. Cette distance peut être toujours considérée comme positive. Mais, parmi ces droites, il en existe une qui est parallèle à x et une qui est tangente à la trajectoire t de A. Nous conviendrons de regarder toujours l'angle de ces deux droites comme étant aigu et positif. De cette manière, l'angle qu'une droite quelconque du faisceau fait avec x est complètement déterminé. D'après les conventions faites plus haut, les distances ρ et les angles $(g^\vee x)$ sont également déterminés pour les droites $g^\vee$ conjuguées des droites du faisceau.

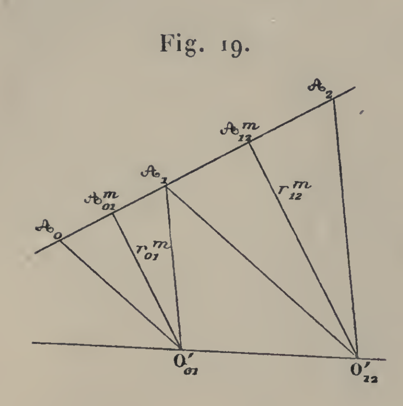
Les droites g passent toutes par le point A et sont en même temps dans un plan parallèle à x. Les droites $g^\vee$ passent donc par le foyer de ce plan, situé à l'infini, et sont dans le plan normal $\alpha^\vee$ de A. Elles forment donc un faisceau de rayons parallèles qui sont tous perpendiculaires sur l et qui font le même angle avec x ; cet angle est le complément de celui sous lequel la tangente à la trajectoire de A rencontre x. Maintenant on peut immédiatement indiquer de quel côté le rayon l est rencontré par les différentes droites $g^\vee$.

En effet, le diamètre u parallèle à x qui appartient au faisceau a une droite conjuguée à l'infini, et la conjuguée d'une droite perpendiculaire à x rencontre cet axe. Si donc g est une droite qui fait avec u un angle obtus dans le sens défini plus haut, elle est du même côté de x que sa conjuguée, et si g fait avec u un angle aigu, g et $g^\vee$ seront de part et d'autre de l'axe instantané. Si donc nous voulons déterminer la position de $g^\vee$ conjuguée d'une droite quelconque g, nous commencerons par déterminer le pied A de la perpendiculaire commune à g et à x. Alors la direction de $g^\vee$ sera perpendiculaire à celle de la tangente à la trajectoire de ce point. Suivant que g fera avec x un angle aigu ou obtus, g et $g^\vee$ seront de côtés différents de l'axe, ou du même côté.

11. Pour faire une application des formules données dans

ce paragraphe, nous nous en servirons pour déterminer la position de la droite des inflexions à laquelle (VIII, 5) se réduit la courbe des inflexions lorsque les axes du déplacement sont parallèles. On peut procéder de la façon suivante. Considérons d'abord tous les points A de Σ pour lesquels A_0, A_1, A_2 sont dans un plan parallèle à x_{01}. Ces points satisfont tous à cette condition que les projections des cordes A_0A_1 et A_1A_2 sont en ligne droite si la projection est faite sur un plan perpendiculaire à x_{01}.

Fig. 19.



Soient (*fig.* 19) $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ les projections de ces points, $\mathcal{A}_{01}^m$, $\mathcal{A}_{12}^m$ celles des points milieux, A_{01}^m, A_{12}^m et O'_{01}, O'_{12} les points d'intersection du plan avec x'_{01} et x'_{12}. Nous désignerons par r_{01}^m la distance de $\mathcal{A}_{01}^m$ à O'_{01}, et r_{12}^m sera celle de $\mathcal{A}_{12}^m$ à O'_{12}. Nous appellerons a la distance des axes x'_{01} et x'_{12}; $2\Omega_1$ et $2\Omega_2$ les rotations correspondant aux deux déplacements, et enfin α sera l'angle que font r_{01}^m et r_{12}^m avec un plan perpendiculaire au plan $[x'_{01}x'_{12}]$. On a

$$(1) \qquad r_{12}^m \operatorname{tang}\Omega_{12} + r_{01}^m \operatorname{tang}\Omega_{01} = a\cos\alpha,$$

$$(2) \qquad r_{12}^m - r_{01}^m = a\sin\alpha.$$

Tous les points A de Σ qui satisfont à ces deux équations jouissent de cette propriété que le plan $A_0A_1A_2$ est parallèle à l'axe du déplacement; mais les points de la droite cherchée sont encore distingués par cela que les cordes A_0A_1, A_1A_2 ont la même inclinaison sur x'_{01} ou x'_{12}. Désignons alors par $2U_{01}$ et $2U_{12}$ les deux composantes de glissement des deux mouvements, on a

$$(3) \qquad \frac{U_{01}}{r_{01}^m \operatorname{tang}\Omega_{01}} = \frac{U_{12}}{r_{12}^m \operatorname{tang}\Omega_{12}}.$$

Introduisons encore les paramètres des deux déplacements, et posons

$$\frac{U_{01}}{\operatorname{tang}\Omega_{01}} = p_{01}, \qquad \frac{U_{12}}{\operatorname{tang}\Omega_{12}} = p_{12}.$$

Divisons les deux membres de la première équation par $r_{01} \operatorname{tang} \Omega_{12}$ et tenons compte de (3), il vient

$$\frac{U_{01} + U_{12}}{U_{01}} = \frac{a \cos \alpha}{r'''_{01} \operatorname{tang} \Omega_{01}}.$$

La deuxième équation donne, en divisant par r'''_{01} et tenant compte de (3),

$$\frac{p_{12} - p_{01}}{p_{01}} = \frac{a \sin \alpha}{r'''_{01}}.$$

Posons encore, pour abréger,

$$\frac{a}{\operatorname{tang} \Omega_{01}} \frac{U_{01}}{U_{01} + U_{12}} = d$$

et

$$a \frac{p_{01}}{p_{12} - p_{01}} = d_1,$$

il vient finalement

$$r'''_{01} = d \cos \alpha,$$
$$r'''_{01} = d_1 \sin \alpha,$$

et cette équation nous montre que g'''_{01} est l'intersection de deux cylindres dont l'un a d comme diamètre et touche le plan $[x'_{01} x'_{12}]$ des deux axes, et dont l'autre a pour diamètre d_1 et a ce même plan des axes comme plan diamétral. Par là, la position de la droite g est elle-même déterminée. Il s'ensuit encore que les deux cylindres se coupent à angle droit.

Si les positions Σ_0, Σ_1 et Σ_2 se rapprochent indéfiniment, le premier des deux cylindres touchera le plan tangent aux surfaces polaires et coupera orthogonalement le second cylindre suivant la droite g et suivant l'axe instantané du mouvement.

Le premier cylindre a, par rapport au plan tangent, absolument la même position que, dans le plan, le cercle des inflexions par rapport à la tangente aux courbes polaires.

XII. — Rotations conjuguées.

1. Nous avons reconnu que le déplacement hélicoïdal est le plus simple de ceux au moyen desquels on peut mouvoir un corps dans l'espace. Il est visible qu'il existe une infinité de déplacements au moyen desquels on arrivera au même résultat. C'est ainsi que Σ peut être amené à occuper d'abord la position Σ_2, puis seulement la position finale Σ_1, etc.

Parmi tous ces mouvements, il ne peut exister aucun autre déplacement hélicoïdal, car x est la seule droite à distance finie qui soit commune à Σ_0 et Σ_1. Mais il existe encore un groupe de mouvements simples au moyen desquels on peut passer de la position Σ_0 à la position Σ_1. Nous allons nous en occuper dans ce paragraphe.

Si g est une droite quelconque de Σ et g^v la droite correspondante de Σ^v, g arrivera en g_1 au moyen d'une rotation autour de g^v. Si donc nous imprimons au système Σ une rotation autour de g^v jusqu'à ce que g_0 et g_1 coïncident, c'est-à-dire jusqu'à ce que deux points correspondants des deux droites coïncident, il suffira alors d'une rotation autour de g_1 pour amener Σ_1 dans sa position finale. Comme g et g^v forment un couple quelconque de droites correspondantes de Σ et Σ^v, il s'ensuit que :

Si g et g^v sont deux droites correspondantes quelconques des systèmes réciproques Σ et Σ^v, Σ peut passer de la position Σ_0 à la position Σ_1 au moyen de deux rotations dont la première a lieu autour de g^v, la seconde autour de g. L'un des deux axes de rotation peut être pris arbitrairement.

On appellera deux pareilles droites des *axes de rotation conjugués*. La droite g^v doit être considérée comme étant une droite fixe de l'espace Σ', et g comme une droite déterminée du système Σ. Le second axe de rotation, considéré comme droite de Σ', est la position finale de la droite g.

2. Si l'une des droites g et g^v est à l'infini, la rotation correspondante se réduit à une translation. Si, par exemple,

g, et par suite g^m, est à l'infini, g^v sera un diamètre du système focal formé par Σ^m et Σ^v ; de même, si g^v est une droite à l'infini, g^m sera un diamètre ; donc g_0 et g_1 seront aussi parallèles à l'axe du déplacement, c'est-à-dire que :

Tout déplacement d'un système à trois dimensions peut, d'une infinité de manières, s'obtenir au moyen d'une rotation combinée à une translation. Les axes de rotation sont tous parallèles entre eux et à l'axe du déplacement.

3. En général, l'ordre des deux rotations n'est pas interversible. En effet, si la première rotation se fait autour de g, c'est-à-dire autour de la droite g_0 de l'espace fixe, et si g^v, considérée comme droite de Σ, est désignée par h_0, il faut que h_0 puisse être amenée dans la position h_1, non seulement par une rotation autour de g_1, mais encore par rotation autour de g_0 ; et de même, il faut que g puisse être amenée en g_1, non seulement par rotation autour de $g^v = h_0$, mais aussi par rotation autour de h_1. Il faut donc que

$$\wedge(g_0 h_0) = \wedge(g_0 h_1) = \wedge(g_1 h_0) = \wedge(g_1 h_1).$$

Or ceci n'aura pas lieu en général. Car nous pouvons déterminer les positions Σ_0 et Σ_1 en nous donnant les positions g_0, h_0 et g_1, h_1 des droites g et h, et comme celles-ci sont arbitraires, les conditions précédentes ne seront pas satisfaites en général.

Toutefois, nous allons démontrer l'existence d'un système de couples de droites conjuguées, pour lesquelles l'ordre de rotation est indifférent. Lorsque chaque point A d'un plan ε appartenant à Σ est arrivé à sa position finale A_1, il en est de même pour Σ tout entier. Or nous avons déjà vu que tout déplacement d'un plan s'obtient au moyen de deux rotations qui peuvent se faire dans un ordre quelconque autour de deux droites perpendiculaires l'une sur l'autre e et e^v.

Mais la droite e se faisait remarquer par cette propriété que e_0 et e_1 se coupent, et l'on peut faire voir que la droite e^v considérée comme droite d de Σ jouit de la même propriété. En effet, si nous faisons d'abord tourner Σ autour de $e^v = d_0$ jusqu'à ce que e_0 coïncide avec e_1, et si ensuite nous effec-

tuons la rotation autour de e_1, $e^\nu = d$ restera, pendant cette rotation, dans un plan perpendiculaire à e_1, c'est-à-dire que d_0 et d_1 se coupent. Nous arrivons donc au résultat suivant :

L'ordre des rotations est interchangeable, si les deux droites conjuguées se coupent à angle droit. Si e est l'une de ces droites, elle jouira toujours de cette propriété que e_0 et e_1 se coupent.

Chacune de ces droites e est telle que sa médiane e^m est la caractéristique d'un plan ε^m de Σ^m.

4. Toute droite de l'espace peut être considérée comme une droite g^ν de Σ^ν. Alors il existe toujours une droite g, telle que si Σ tourne d'un certain angle autour de g^ν, g_0 vienne coïncider avec g_1. A chaque droite de l'espace correspond ainsi un angle déterminé de rotation. On peut obtenir sa valeur de la façon suivante :

Si G^m et G^ν sont les points de g^m et de g^ν où ces droites sont coupées par leur perpendiculaire commune, soient r et ρ les distances de ces points à l'axe x du déplacement. Nous désignerons par λ l'angle que la corde G_0G_1 du point G^m fait avec x ; les composantes du mouvement hélicoïdal seront encore $2U$ et 2Ω, et l'angle de rotation correspondant à g^ν, c'est-à-dire l'angle $G_0G^\nu G_1$, sera $2\omega^\nu$. On a

$$\operatorname{tang}\omega^\nu = \frac{\frac{1}{2}G_0G_1}{G^mG^\nu}.$$

Mais la projection de la corde G_0G_1 sur x a la valeur $2U$, par conséquent

$$\tfrac{1}{2}G_0G_1 = U : \cos\lambda,$$

et comme la corde G_0G_1 et l'axe de rotation g^ν font des angles complémentaires avec x, on a

$$\cos\lambda = \sin(g^\nu x);$$

li s'ensuit que

$$\tfrac{1}{2}G_0G_1 = U : \sin(g^\nu x).$$

De plus [XI, éq. (5)],

$$G^m G^v = r + \rho = \frac{U}{\tan g\Omega}[\cot g(g^m x) + \cot g(g^v x)]$$
$$= \frac{U}{\tan g\Omega}\,\frac{\sin(g^m g^v)}{\sin(g^m x)\sin(g^v x)}.$$

Donc

(1) $$\frac{\tan g\omega^v}{\tan g\Omega} = \frac{\sin(g^m x)}{\sin(g^m g^v)}.$$

Comme g^m et g^v sont des droites conjuguées du système focal formé par Σ^m et Σ^v, c'est-à-dire qu'elles ont une signification géométrique réciproque, on a de la même manière, pour la rotation $2\omega^m$ correspondant à g^m,

(2) $$\frac{\tan g\omega^m}{\tan g\Omega} = \frac{\sin(g^v x)}{\sin(g^m g^v)},$$

et il faut remarquer qu'ici g^m doit être considérée comme une droite h^v de Σ^v, c'est-à-dire comme un axe de rotation pour les droites h_0 et h_1 de Σ_0 et Σ_1.

Des deux dernières équations on tire

(3) $$\frac{\tan g\omega^m}{\sin(g^v x)} = \frac{\tan g\omega^v}{\sin g^m x} = \frac{\tan g\Omega}{\sin(g^m g^v)},$$

et cette formule conduit immédiatement à la proposition suivante :

Si, par un point quelconque de l'espace, on mène trois droites parallèles à deux droites conjuguées g^m *et* g^v *et à l'axe du déplacement, et que, sur ces droites, on porte des longueurs proportionnelles à* $\tan g\omega^m$, $\tan g\omega^v$, $\tan g\Omega$, *ces trois longueurs seront les côtés et la diagonale d'un parallélogramme.*

5. L'équation (1) détermine la valeur de ω^v à l'aide de la droite g^m conjuguée de g^v. Nous nous proposons de la transformer, de manière à ne faire intervenir que la droite g^v.

On avait

$$\frac{\tang\omega^{\text{v}}}{\tang\Omega} = \frac{\frac{1}{2}G_0G_1}{(r+\rho)\tang\Omega} = \frac{U : \sin(g^{\text{v}}x)}{U[\cotg(g^{m}x) + \cotg(g^{\text{v}}x)]}.$$

Mais

$$U \cotg(g^{m}x) = \rho \tang\Omega.$$

Donc

$$\frac{\tang\omega^{\text{v}}}{\tang\Omega} = \frac{U}{\rho \tang\Omega \sin(g^{\text{v}}x) + U \cos(g^{\text{v}}x)},$$

et dans cette expression de $\tang\omega^{\text{v}}$ n'intervient que la droite g^{v}.

Le dénominateur du second membre de l'équation a une signification géométrique simple. Il est, en effet [XI, éq. (10)], égal à la projection de la demi-corde de G^{v} sur g^{v}, en admettant que nous considérions g^{v} comme une médiane h^m de Σ^m. Désignons par p^{v} la valeur de cette projection ; on a

(4) $$p^{\text{v}} \tang\omega^{\text{v}} = U \tang\Omega,$$

c'est-à-dire que :

Pour toutes les droites g^{v} le produit p^{v} $\tang\omega^{\text{v}}$ a une valeur constante.

L'expression $U \tang\Omega$ est la valeur de ce produit pour l'axe du déplacement. Mais si nous choisissons comme droite g^{v} une droite qui lui est parallèle, p^{v} aura également la valeur U ; donc l'angle de rotation correspondant est aussi $2\,\Omega$, c'est-à-dire que :

Pour toutes les droites parallèles à l'axe du déplacement, l'angle de rotation correspondant est constant et égal à la composante de rotation du mouvement hélicoïdal.

Si donc nous remplaçons le mouvement hélicoïdal par une rotation et une translation, ce n'est pas seulement la direction de l'axe de rotation, mais aussi la grandeur de cette rotation qui reste constante.

6. Désignons la droite g^{v} considérée comme droite de Σ^m par h^m et le point G^{v} par H^m, p^{v} est la projection de $\frac{1}{2}H_0H_1$ sur g^{v}. Mais

$$\tfrac{1}{2}H_0H_1 = (r+\rho)\tang\omega^m,$$

et comme la corde H_0H_1 est dans un plan perpendiculaire à g''', H_0H_1 et g''' feront des angles complémentaires avec g^{v}, et il s'ensuit que

$$p^{v} = (r + \rho) \operatorname{tang} \omega''' \sin(g''' g^{v}).$$

L'équation (4) se transforme donc en

$$(5) \qquad (r + \rho) \operatorname{tang} \omega''' \operatorname{tang} \omega^{v} \sin(g''' g^{v}) = U \operatorname{tang} \Omega,$$

c'est-à-dire que le produit qui figure au premier membre a une valeur constante pour deux droites conjuguées g''' et g^{v}. Ce produit est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Si, en effet, nous portons sur les deux droites g''' et g^{v} des longueurs proportionnelles à $\operatorname{tang} \omega'''$ et $\operatorname{tang} \omega^{v}$, les quatre extrémités seront les sommets d'un tétraèdre. Mais le sextuple du volume d'un tétraèdre est égal au produit de deux arêtes opposées multiplié par leur plus courte distance et par le sinus de l'angle que font entre elles ces arêtes. Nous voyons donc que le premier membre de notre équation représente six fois le volume du tétraèdre que nous venons de construire; et la position relative des longueurs portées sur g''' et g^{v} est complètement indifférente, c'est-à-dire que :

Si l'on porte sur deux droites conjuguées g''' et g^{v} deux longueurs proportionnelles à $\operatorname{tang} \omega'''$ *et* $\operatorname{tang} \omega^{v}$, *le tétraèdre ainsi défini a un volume constant pour tous les couples de droites conjuguées, pourvu que le rapport de proportionnalité reste le même.*

Les théorèmes établis dans ce qui précède sont valables pour des positions infiniment voisines du système. On peut donc les énoncer pour un moment quelconque du mouvement. Au lieu des grandeurs $\operatorname{tang} \omega'''$ et $\operatorname{tang} \omega^{v}$ interviennent alors les rotations infiniment petites ω et ω^{v} qui correspondent à deux axes de rotation conjugués.

XIII. — Exemples.

1. Pour finir, on traitera quelques problèmes qui concernent des mouvements spéciaux de systèmes à trois dimensions.

Un premier exemple sera le suivant :

Un trièdre trirectangle se meut de telle façon que son sommet décrive une courbe c', pendant que les faces α, β, γ restent les plans osculateur, normal et rectifiant de la courbe c'.

Nous déterminons ainsi d'une manière complète le déplacement du trièdre et du système Σ dont il fait partie; car, si nous considérons une position arbitraire du trièdre mobile, et que T soit un point de α qui est sur la tangente t à la courbe c', que K soit un point de β qui est sur l'axe de courbure k de c', et que le point H de γ soit sur la droite rectifiante h de c', nous pourrons définir, à l'instant considéré, le mouvement de la manière suivante :

Le mouvement se fait de telle façon que le point S de Σ se déplace sur une courbe c', et que les points T, K, H du système restent dans le plan osculateur, dans le plan normal et dans le plan rectifiant de c'. Nous voyons donc qu'en effet le système focal est déterminé à chaque instant, c'est-à-dire que le mouvement de Σ est complètement déterminé.

Le plan β a l'axe de courbure k de la courbe comme caractéristique et le point S comme foyer : donc k et t sont deux droites conjuguées à angle droit l'une sur l'autre. Par conséquent, t est la caractéristique, et le centre de courbure C le foyer du plan α. L'axe x du déplacement rencontre la droite $|\alpha\beta|$, c'est-à-dire la normale principale de c', à angle droit. Le plan γ est donc parallèle à l'axe du déplacement, et, comme sa caractéristique est la droite rectifiante h, celle-ci est parallèle à l'axe du déplacement. La droite h^{v} conjuguée de h est donc à l'infini, et h passant par S, c'est-à-dire par le foyer de β, h^{v} est située dans le plan β, c'est-à-dire que c'est la droite de ce plan qui est rejetée à l'infini. La droite d'intersection a de β et γ est un rayon du complexe parce qu'elle passe par le foyer S de β; elle passe donc aussi par le foyer de γ, c'est-à-dire que le foyer de γ est le point à l'infini sur a.

Pour construire l'axe instantané, il nous suffit de deux couples de droites conjuguées. Nous en connaissons déjà un.

Soit maintenant une droite quelconque g qui rencontre la tangente t et l'axe de courbure k, et soient K et T ses points d'intersection avec ces droites; le plan normal de T passera

par le foyer C de α et sera perpendiculaire sur α; le plan normal de K passe par S et il est perpendiculaire sur β. On sait donc construire ces deux plans normaux et, par suite, la droite conjuguée $g^{\vee}$ de g.

Soit X le point où l'axe instantané rencontre la normale principale x, et désignons par φ l'angle que fait avec t l'axe et, par conséquent, aussi la droite rectifiante.

On aura [XI, éq. (16)],

$$AX \operatorname{cotg}\varphi = CX \operatorname{tang}\varphi,$$

c'est-à-dire

$$AX = CX \operatorname{tang}^2\varphi, \qquad CX = AX \operatorname{cotg}^2\varphi.$$

De là

$$AX + CX = CX(1 + \operatorname{tang}^2\varphi),$$
$$CX + AX = AX(1 + \operatorname{cotg}^2\varphi)$$

et enfin

$$AX = AC \cos^2\varphi,$$
$$CX = AC \sin^2\varphi.$$

Ces équations déterminent le point X où la normale principale est coupée par x [1].

2. L'hyperboloïde orthogonal est engendré par deux faisceaux projectifs dont les plans correspondants sont perpendiculaires l'un sur l'autre (VII, 4). Si donc deux plans perpendiculaires l'un sur l'autre α et β se déplacent de manière que chacun d'eux passe par une droite fixe, la ligne d'intersection des deux plans décrira un hyperboloïde orthogonal.

Soient a' et b' les droites fixes et h la droite d'intersection des plans α et β.

Le mouvement est déterminé par quatre conditions. Toute droite élevée sur α en un point quelconque de a' est un rayon normal, de même toute droite perpendiculaire à β en un point de b'. Soient γ et δ les plans qui passent par ces droites et les normales à α et β, leur droite d'intersection g sera

---

[1] L'axe du déplacement est alors l'axe de l'hélice osculatrice de c'. (SCHELL, *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung*, Chap. IX, nos 3 et 5.)

une des lignes qui sont rencontrées par toutes les normales; l'autre est la droite de l'infini perpendiculaire sur h. Ces deux droites sont donc les rayons directeurs du système de rayons formé par les normales, et, en même temps, les deux droites qui sont conjuguées pour tous les déplacements possibles du système.

La caractéristique de α est a' et celle de β est b'. Le plan γ qui passe par a' et qui est perpendiculaire sur α renferme, par conséquent, toutes les droites adjointes aux plans perpendiculaires à α (VI, 3), et de même le plan δ qui passe par b', et qui est perpendiculaire à β, renferme toutes les droites adjointes aux plans perpendiculaires à β. Par conséquent, la droite d'intersection g des plans γ et δ est adjointe aux plans perpendiculaires à h. Elle se trouve, par conséquent, sur le paraboloïde des normales de h.

De là résulte une construction de la normale à l'hyperboloïde orthogonal. Au point A de h, élevons sur cette droite une perpendiculaire qui rencontre g : ce sera la normale.

La droite g est un diamètre pour tout système focal qui correspond à un des mouvements possibles : donc tous les axes du déplacement sont parallèles entre eux, et le cylindroïde des axes se réduit à un faisceau de rayons parallèles. En effet, la perpendiculaire commune à deux droites g et g^{v} rencontre aussi les diamètres adjoints aux plans perpendiculaires sur g ou g^{v}. Donc nous devons considérer la perpendiculaire commune à g et à h comme étant aussi la perpendiculaire commune à g et g^{v}_{∞}. Nous obtiendrons alors le cylindroïde (X, 9) en coupant le système de rayons par un plan quelconque ε contenant g^{v}_{∞}, et si nous déterminons toutes les droites qui sont perpendiculaires à la fois sur k et sur un des rayons contenus dans ε. Mais le plan ε est parallèle à k : donc les perpendiculaires forment, en effet, un faisceau de rayons parallèles.

La tangente à la trajectoire de tout point A de g est parallèle à h, car elle est normale à un plan qui passe par deux rayons perpendiculaires sur h. Pour tout mouvement possible, nous avons donc la relation (XI, 13)

$$\operatorname{tang}(hg) = r : p,$$

où r est la distance du point à l'axe instantané, et p le paramètre du mouvement hélicoïdal correspondant.

3. Les surfaces podaires fournissent un exemple pour le cas où le mouvement d'un système n'est soumis qu'à trois conditions où, par conséquent, ce système possède le troisième degré de liberté.

Soit Φ' une surface quelconque et A′ un point fixe dans l'espace. Si de A′ nous abaissons des perpendiculaires sur tous les plans tangents τ de la surface Φ', le lieu des points P est la surface podaire de Φ'. On peut l'engendrer aussi en déplaçant le système formé par le plan τ, et la perpendiculaire a élevée en P à ce plan, de telle manière que τ reste constamment tangent à la surface Φ' pendant que a passe toujours par un point fixe A′. On connaît donc à chaque instant trois rayons normaux, à savoir la normale l au point de contact, et le plan normal de A′ qui remplace deux normales ; car, dans le mouvement inverse, A′ se déplace sur a, et les plans normaux se confondent pour le mouvement direct et le mouvement inverse.

Soient maintenant m et n deux rayons du plan normal qui passent par A′. Le mouvement est défini dans chaque position du système par l, m, n. Déterminons l'hyperboloïde dont les points sont forcés de rester sur des surfaces. Comme m et n se coupent, il se décompose en deux faisceaux de rayons. En effet, tout rayon du plan $[mn]$ qui passe par A′ est un rayon normal.

Si, de plus, L est le point d'intersection de l avec ce plan, et si nous désignons par p celui des rayons normaux qui passe par L, toute droite du plan $[lp]$ qui passe par L est un rayon normal. Mais le plan $[lp]$ contient toujours la droite a, par conséquent un rayon normal de ce plan passera par P. De là il suit que P décrit une surface pendant le déplacement que définissent τ et a.

On a ainsi déterminé également la normale à la surface podaire décrite par P. La normale est, en effet, le rayon normal qui passe par P, c'est-à-dire PL. Si T est le point de contact de τ avec Φ', les quatre points P, T, L, A′ forment un rectangle dont PL est une diagonale.

4. Imaginons qu'un trièdre trirectangle se déplace de telle façon que les plans α, β, γ de ses faces restent tangents à un ellipsoïde fixe.

Soient S le sommet du trièdre, et $a = |\beta\gamma|$, $b = |\gamma\alpha|$, $c = |\alpha\beta|$ les arêtes ; L, M, N seront les points de contact des faces avec l'ellipsoïde dans une position quelconque. Nous désignerons encore les normales en ces points par l, m, n, et alors tous les points de l'hyperboloïde déterminé par l, m, n resteront sur des surfaces pour tous les mouvements possibles du système. On peut faire voir que cet hyperboloïde passe par S.

Appelons en effet O′ le point de l'espace fixe avec lequel coïncide S. Par O′, on peut mener trois plans tangents rectangulaires à l'ellipsoïde. Le cône circonscrit à Φ′ dont le sommet est en S a donc une infinité de groupes de plans tangents formant un trièdre trirectangle. Le trièdre pourra donc prendre une infinité de positions telles que son sommet vienne en O′ et que ses faces touchent l'ellipsoïde, c'est-à-dire que nous pourrons faire mouvoir, autour de O′, les trois plans perpendiculaires l'un sur l'autre, de telle façon que chacun d'eux reste tangent à Φ′ ou au cône. Mais lorsqu'une gerbe de rayons se déplace autour d'un point fixe, les plans normaux que l'on peut mener aux plans de cette gerbe, par leurs rayons de contact, se coupent suivant une même droite qui est l'axe instantané de rotation. Si donc, par les rayons de contact des plans tangents au cône, nous menons des plans perpendiculaires sur α, β, γ, ils se couperont tous suivant une droite passant par O′. Cette droite rencontre donc aussi les trois normales l, m, n, c'est-à-dire que :

Si S *est un point d'où l'on puisse mener trois plans tangents rectangulaires à un ellipsoïde, et qu'aux points de contact on mène les normales à cet ellipsoïde,* S *sera toujours sur l'hyperboloïde que déterminent ces trois normales.*

Cela est vrai pour toute position du système : donc S décrit une surface. La normale est la droite passant par S et appartenant au système de rayons déterminé par l, m, n.

La surface décrite par S est une sphère, car soit ε' un plan quelconque de l'espace fixe; considérons toutes les positions

du trièdre pour lesquelles α coïncide avec ε', c'est-à-dire imaginons que l'on déplace ce trièdre de telle façon que α coïncide avec ε', tandis que β et γ touchent l'ellipsoïde.

Dans ce mouvement, chacun de ces plans enveloppera un cylindre elliptique. En même temps, l'angle formé par les arêtes b et c se déplacera dans le plan $\alpha = \varepsilon'$ de telle façon que b et c restent tangentes à une conique, celle qui résulte de l'intersection de ε' avec le cylindre elliptique. Mais alors le sommet de cet angle décrira un cercle et il s'ensuit que tous les points S situés dans ε' sont sur un cercle. Ce cercle a d'ailleurs pour centre le centre de la conique; par conséquent le plan normal du cercle que S décrit dans ε' passe toujours par le centre de l'ellipsoïde. Cela est vrai pour tout plan ε'; il s'ensuit donc bien que le point S décrit une sphère qui a pour centre le centre de l'ellipsoïde.

C'est-à-dire que :

Si un triède trirectangle se déplace de telle façon que ses plans restent tangents à un ellipsoïde fixe, son sommet décrira une sphère qui a pour centre le centre de l'ellipsoïde (¹).

Accessoirement, on voit encore que la génératrice appartenant au système déterminé par l, m, n, qui passe par S, est la droite qui joint S au centre de l'ellipsoïde.

5. Le mouvement d'une droite consiste à chaque instant, comme il a été montré au commencement du Chapitre, en une rotation autour d'une droite $g^\vee$. Comme les plans normaux de tous les points de g passent par $g^\vee$, les rayons normaux de tous les points forment un système de rayons qui a g et $g^\vee$

(¹) La démonstration donnée plus haut de ce fait, que les points de S situés dans un plan sont sur un cercle, a été considérée comme suffisante pour prouver que S décrit une sphère. Mais cela n'est pas permis, car on voit simplement que pour *certaines* positions du trièdre, celles pour lesquelles α coïncide avec ε', les points S sont sur un cercle. Or il existe encore une infinité d'autres positions du trièdre pour lesquelles S se trouve dans le plan ε' et il faut montrer que pour ces positions S est sur le cercle. On l'a fait dans le texte en démontrant que S est situé sur l'hyperboloïde des points qui décrivent des surfaces.

pour rayons directeurs. Celui-ci est déterminé par quatre normales. Si donc on connaît les rayons normaux de quatre points de g, g^{v} sera également donné. Il s'ensuit donc que :

Si quatre points d'une droite g sont assujettis à la condition de rester sur des surfaces fixes, le mouvement de la droite sera complètement déterminé. Chacun de ses points décrira une courbe, et g elle-même engendrera une surface réglée.

On peut encore considérer la chose à un autre point de vue. En effet, la position d'un système est déterminée, si l'on connaît la position de trois points qui déterminent un plan. Par conséquent, la position d'une droite ne définit pas encore celle du système; et le mouvement de Σ ne sera pas déterminé non plus lorsque l'on connaîtra le mouvement de la droite g. Bien plus, si g exécute un mouvement déterminé, Σ pourra encore se déplacer d'une infinité de manières. Nous obtiendrons un de ces déplacements en obligeant un cinquième point, non situé sur g, à rester sur une surface fixe.

A chacun de ces mouvements se rapporte à chaque instant un système focal qui le caractérise; pour tous ces systèmes focaux g et g^{v} constitueront un couple de droites conjuguées.

Les théorèmes et les constructions qui ont été établis plus haut restent valables pour tous les éléments du système focal ou du système Σ qui concernent g, même lorsque nous considérons isolément le mouvement d'une droite. Nous obtiendrons par exemple la normale au point A de g à la surface engendrée par g, en menant en ce point la perpendiculaire à g qui rencontre g^{v}, etc.

6. Définissons le mouvement de g en obligeant quatre points A, B, C, D à se mouvoir sur les plans α', β', γ', δ'. Et considérons g comme faisant partie d'un système à trois dimensions Σ dont nous déterminerons le mouvement en obligeant un point E à rester sur une surface Φ'_{ε}. Mais il existe à chaque instant (IX, 5) une surface du troisième ordre F^3 de Σ dont les points décrivent des trajectoires à plans osculateurs stationnaires, et les droites de Σ sont sur cette surface lorsqu'elles renferment plus de trois pareils points. Or c'est ce qui arrive pour la droite g. Par conséquent, tout point de g jouit

de cette propriété que quatre positions successives sont dans le même plan, et, comme cela a lieu à chaque instant, il s'ensuit que :

Si quatre points d'une droite g se déplacent dans des plans fixes, cela a lieu pour chaque point de la droite, c'est-à-dire que chaque point de la droite décrit une courbe plane.

Soient maintenant g_0, g_1, g_2 trois positions quelconques, que prend g au cours du mouvement : on a

$$\alpha' = [A_0 A_1 A_2],$$
$$\beta' = [B_0 B_1 B_2],$$
$$\gamma' = [C_0 C_1 C_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire que les plans α', β', γ', ... sont obtenus au moyen de trois ponctuelles congruentes, et forment par conséquent un faisceau du troisième ordre.

Le faisceau de plans engendré par g_0, g_1, g_2 contient le plan de l'infini, car les points à l'infini de g_0, g_1, g_2 sont des points correspondants. Considérons le système de rayons qui lui est associé; on verra de la même façon qu'au paragraphe VII, 1, que nous pouvons représenter ce système au moyen d'une gerbe O' de telle façon qu'à chaque rayon de la gerbe corresponde le rayon parallèle du système, et qu'ainsi aux droites g_0, g_1, g_2 correspondront les droites g'_0, g'_1, g'_2 de la gerbe O'.

Soit maintenant x' l'axe du cône de révolution qui passe par g'_0, g'_1, g'_2 c'est-à-dire le rayon de O' qui fait des angles égaux avec g'_0, g'_1, g'_2, le rayon correspondant x du système de rayons sera aussi également incliné sur g_0, g_1, g_2.

Si ε est un plan quelconque du faisceau, si s est un rayon quelconque du système de rayons, et E_s le point d'intersection de ε et de s, nous pourrons rapporter la ponctuelle A_s, B_s, C_s, ... sur s', en A'_s, B'_s, C'_s, de telle façon que le point E_s de s corresponde au point O' de s'. Alors on démontrera que tous les points A'_s qui correspondent aux points A_s du plan α sont dans un plan α'. On pourra le faire de la manière suivante : soit g_ε une droite quelconque de ε, les rayons s qui rencontrent g_ε forment en général les génératrices d'un pa-

raboloïde. Les rayons correspondants s' de O′ forment un faisceau de rayons dont le plan est parallèle au plan directeur du système de génératrices. Le paraboloïde coupe chaque plan α suivant la droite g_α qui correspond à g_ε. Projetons maintenant les rayons s du paraboloïde sur un plan quelconque parallèle au plan directeur, en prenant comme centre de projection le point à l'infini sur g_ε; nous obtenons un faisceau de rayons s'' qui est projectivement égal au faisceau s'. Les plans projetants sont parallèles entre eux et, pour chaque rayon s, la ponctuelle qu'il contient est congruente à sa projection s'', qui, par conséquent, est égale à la ponctuelle s'. Ainsi le faisceau s'' et les ponctuelles qu'il renferme sont respectivement congruents au faisceau s' et aux ponctuelles de ce faisceau; et de plus le plan des rayons s'' est parallèle au plan des rayons s'.

A tous les points d'une droite g_α du paraboloïde correspondent les points d'une droite g''_α; donc dans O′ on aura également une droite g'_α. Toutes ces droites g''_α, g''_β, ... sont parallèles entre elles; la même chose a donc lieu aussi pour les droites correspondantes g'_α, g'_β, ... de la gerbe O′. Donc, non seulement il correspond à tout point A_s du plan α un point déterminé A'_s dans la gerbe O′, mais à tous les points d'une droite g_α correspondent les points d'une droite g'_α, c'est-à-dire qu'aux points d'un plan α correspondent les points d'un plan α', et comme à tout point à l'infini sur α correspond un point à l'infini sur α', α et α' seront deux systèmes plans en affinité collinéaire.

Comme toutes les droites g'_α, g'_β, ... sont parallèles entre elles, il s'ensuit encore que les plans α', β' sont tous parallèles.

Les plans α', β', ... sont perpendiculaires sur le rayon x' de la gerbe. Car, soient E_0, E_1, E_2 les points de g_0, g_1, g_2 situés dans ε, on a

$$E_0A_0 = E_1A_1 = E_2A_2$$

et par conséquent

$$O'A'_0 = O'A'_1 = O'A'_2.$$

Donc le plan $\alpha' = (A'_0A'_1A'_2)$ est en effet perpendiculaire sur x'.

Enfin on voit qu'à toutes les positions que prend la droite g au cours du mouvement, correspondent dans O' les génératrices du cône de révolution déterminé par g'_0, g'_1, g'_2. Car soit g_i la position de la droite g à un moment quelconque, g_i sera la droite de jonction des points E_i et A_i; par conséquent, g'_i est la ligne de jonction de O' et A'_i. Or

$$O'A'_i = O'A'_0 = O'A'_1 = O'A'_2,$$

et A'_i est dans le plan α'; donc $O'A'_i = g'_i$ est une génératrice du cône de révolution.

Nous pouvons maintenant énoncer les conclusions auxquelles nous étions parvenu au paragraphe VII pour le système de rayons, et nous arrivons au théorème suivant :

Si une droite se meut de telle façon que quatre de ses points restent dans des plans fixes, tout point de la droite se déplace dans un plan et décrit une ellipse. Tous ces plans forment un faisceau de plans du troisième ordre, qui constitue l'ensemble des plans osculateurs à une parabole cubique. Les centres des ellipses sont sur une droite; celle-ci est perpendiculaire au plan qui contient l'asymptote de la parabole cubique. La droite g elle-même décrit une surface du quatrième ordre; toutes les génératrices de la surface font des angles égaux avec l'axe sur lequel sont les centres des ellipses ([1]).

Les centres des ellipses sont les points homologues des plans en affinité du faisceau, qui ont entre eux la distance minimum.

7. Si la droite g est telle que trois de ses points A, B, C se meuvent dans trois plans fixes α, β, γ, tout autre point D de cette droite décrira un ellipsoïde. Car des théorèmes précédents il ressort que toutes les positions que le point D peut prendre dans un plan quelconque δ de l'espace sont sur une ellipse.

([1]) MANNHEIM, *Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace* (*Comptes rendus*, t. LXXVI, p. 635).

La représentation sur la gerbe fut donnée par HALPHEN, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 114.

Considérons g comme faisant partie d'un système à trois dimensions Σ, et déterminons encore le mouvement de telle sorte qu'un quatrième point E de Σ reste sur une surface quelconque, D décrira toujours l'ellipsoïde. Mais, comme g est maintenant une droite de Σ, les normales aux surfaces décrites par tous les points de g formeront un hyperboloïde, c'est-à-dire que les normales aux points A, B, C, D sont sur un hyperboloïde.

Considérons une des positions de g pour laquelle le point D vient dans un des plans α, β, γ, par exemple dans le plan α.

Comme A est toujours dans α, g sera tout entière dans ce plan; par conséquent, il faut que B soit un point de la droite $|\alpha\beta|$ et C un point de $|\alpha\gamma|$. Nous obtiendrons donc toutes les positions de g pour lesquelles D est dans α, en déplaçant g de telle façon que B se meuve sur $|\alpha\beta|$ et C sur $|\alpha\gamma|$.

Mais alors D décrit une ellipse dont le centre est au point d'intersection des trois plans α, β, γ. La même chose a lieu pour les plans β et γ, d'où il suit que le sommet du trièdre formé par les plans α, β, γ est le centre de l'ellipsoïde, c'est-à-dire que :

Si une droite se meut de telle façon que trois de ses points restent dans trois plans fixes, tout autre point de la droite décrira un ellipsoïde dont le centre est le point d'intersection des plans fixes. Les normales à tous les ellipsoïdes forment à chaque instant un hyperboloïde [1].

Si en particulier les plans α, β, γ sont perpendiculaires entre eux, ils constituent les plans principaux de tous les ellipsoïdes; car alors l'ellipse située dans un quelconque des trois plans a pour axes les droites d'intersection du plan avec les deux autres, et les longueurs des axes seront DA, DB, DC.

8. Considérons encore trois plans quelconques α, β, γ.

Le lieu de D est dans chaque plan passant par D une ellipse, intersection du plan avec l'ellipsoïde.

Parmi ces plans, il en existe un δ qui est tangent à l'ellip-

---

[1] Ce théorème est dû à Dupin (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier 14, p. 60).

soïde. Si donc nous déterminons le mouvement de g de telle façon que les quatre points A, B, C, D restent dans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le mouvement de la droite sera impossible. Dans ce cas les normales élevées en A, B, C, D sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont sur un hyperboloïde, tandis que cela n'a pas lieu dans tous les autres cas. Il s'ensuit donc que :

Si quatre points A, B, C, D *d'une droite doivent se mouvoir dans quatre plans fixes* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *et si les normales aux plans élevées aux points* A, B, C, D *sont sur un hyperboloïde, le mouvement est impossible* (1).

La droite g est alors le rayon du système du troisième ordre dont il vient d'être question, qui rencontre les plans du faisceau de plans qui lui est associé aux points dont la distance mutuelle est minimum.

XIV. — Sur le déplacement d'un système invariable, dans le cas où les surfaces des axes sont cylindriques (2).

Le déplacement d'un système invariable dans le cas où les surfaces des axes sont cylindriques n'a pas encore été étudié spécialement. Cependant, et l'on devait s'y attendre, étant donnée la nature particulière du mouvement, il est caractérisé par une forme remarquablement simple des lois du déplacement.

En particulier, on mentionnera ici ce fait, qu'il se présente alors une analogie toute spéciale avec les lois du déplacement plan, analogie qui ne se manifeste pas lors d'un mouvement tout à fait général. Et, en effet, aux théorèmes relatifs au cercle des inflexions de Bresse, et aux points à courbure stationnaire, correspondent des théorèmes tout à fait analogues sur les points dont les trajectoires ont des plans tangents d'inflexion et des sphères osculatrices stationnaires.

On connaît déjà un cas particulier du déplacement que nous avons en vue. C'est en même temps le seul mode de déplace-

---

(1) Halphen, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, p. 18.

(2) Traduction d'un Mémoire de l'auteur inséré aux *Math. Annalen*, t. XL.

ment dans l'espace qui ait été jusqu'ici l'objet d'une étude approfondie. On le définit par cette propriété que *tout point décrit une courbe plane*, ou, si l'on passe au mouvement inverse, *que chaque plan passe par un point fixe*. C'est M. Darboux [1] qui, le premier, montra l'existence de ce déplacement remarquable.

Dernièrement il a été étudié plus complètement par M. Mannheim [2].

Les surfaces des axes sont deux cylindres circulaires; leurs cercles de base sont identiques avec les courbes polaires du mouvement plan où chaque point décrit une ellipse.

C'est ce déplacement qui a donné lieu aux considérations suivantes.

Je fais encore remarquer que les théorèmes généraux auxquels on arrivera par la suite nous fourniront un moyen de réaliser mécaniquement le mouvement en question, procédé qui n'était pas connu encore. Car, *si un triangle se déplace parallèlement à son plan, de telle façon que ses trois sommets restent sur trois plans fixes, tout point invariablement lié au triangle décrit une ellipse*. Par le mouvement inverse on a un théorème correspondant à celui-ci par voie de dualité.

Je commence par donner les relations générales qui lient les points mobiles aux plans osculateurs instantanés de leurs trajectoires; puis j'en déduis les théorèmes relatifs aux points qui jouissent d'une propriété stationnaire. Enfin je termine par un exposé simple du cas particulier dont j'ai fait mention.

A. La correspondance cubique entre les points et les plans osculateurs de leurs trajectoires.

1. Soient c et c' les courbes polaires d'un déplacement plan; soit de plus c_p la trajectoire décrite par le point P du plan mobile ε.

---

(1) *Sur le mouvement d'une figure invariable* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 118).

(2) *Étude d'un déplacement particulier etc.* (*Rendiconti del circ. mat. di Palermo*, t. III, p. 131) et *Déplacement d'une figure invariable* (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier LX).

Nous désignerons les surfaces cylindriques dont les bases sont respectivement c, c', c_p, et dont les génératrices sont perpendiculaires sur ε, par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_p$, respectivement. La génératrice de la surface $\mathfrak{C}_p$ qui passe par P sera désignée par p, de sorte que, pour *tout* déplacement qui admet comme surfaces des axes les cylindres $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, la droite p décrira la surface $\mathfrak{C}_p$.

Si l'on se donne une seconde surface F_p sur laquelle devra toujours rester le point P, la courbe décrite par ce point, et par suite le mode de déplacement lui-même se trouveront déterminés.

Le mouvement consiste en un roulement et un glissement du cylindre $\mathfrak{C}$ sur $\mathfrak{C}'$, et la grandeur du glissement dépend de la surface F_p. *Tous les points de p décrivent la même courbe;* pour étudier le déplacement, il suffira donc en général de considérer les points d'un plan η perpendiculaire à la direction de l'axe.

Le mouvement dans l'espace de Σ et le mouvement plan de ε sont connexes en ce sens, qu'à chaque position de Σ correspond une position déterminée de ε, et réciproquement. Le plan η qui servira à caractériser le mouvement de Σ sera considéré comme coïncidant avec ε; seulement il faudra à chaque fois spécifier si, pour un point P de ce plan, on considère son mouvement dans l'espace ou son déplacement dans le plan ε. C'est pourquoi nous continuerons à nous servir de la double notation ε, η.

2. Il sera avantageux de commencer par quelques mots sur le déplacement du plan de l'infini ε_∞. Ce plan, quel que soit le genre de déplacement de Σ, se meut sur lui-même. Mais, dans le cas qui nous occupe, *trois de ses points restent fixes pendant toute la durée du déplacement;* à savoir, le point Z_∞ à l'infini sur la direction de l'axe, et les points cycliques I_∞ et J_∞ de la droite à l'infini de η. Les droites que déterminent ces trois points sont donc fixes aussi; nous les désignerons par h_∞, i_∞, j_∞, h_∞ étant la droite à l'infini du plan η.

Le déplacement du plan à l'infini est donc, dans le sens non euclidien, une rotation autour de Z_∞. Tout point de ε_∞ décrit une section conique ou, en parlant le langage non euclidien,

un cercle dont le centre est en Z_∞. Pour les points des droites h_∞, i_∞, j_∞, ces cercles deviennent ces droites elles-mêmes ([1]).

Le mode de mouvement considéré est complètement caractérisé par le déplacement du plan ε_∞ tel qu'il vient d'être indiqué.

3. Soient P_0, P_1, P_2 trois positions d'un point quelconque de l'espace mobile Σ, le plan π' qu'elles déterminent est le plan de Σ' qui, lors d'un déplacement continu, deviendra le *plan osculateur instantané* de la trajectoire. Entre les points P et les plans π', il existe une *correspondance cubique réversible et univoque;* elle est un cas particulier de celle qui a été étudiée en détail par Nöther et Cremona.

On sait que la courbe fondamentale du sixième ordre de Σ, aux points de laquelle correspond dans Σ une droite ou un faisceau de plans, se décompose pour un déplacement quelconque de Σ en deux courbes du troisième ordre, dont l'une est contenue dans le plan de l'infini, pendant que l'autre est la courbe gauche c^3, connue sous le nom de *courbe des inflexions*. Dans les cas spéciaux du déplacement que nous étudions ici, la courbe à l'infini se décompose, comme nous l'avons vu plus haut, pour donner les trois droites h_∞, i_∞, j_∞, pendant que la courbe gauche c^3 dégénère également et donne trois droites passant par Z_∞.

Mais de ces droites, une seule reste à distance finie, les autres coïncident avec i_∞ et j_∞. Nous désignerons la première de ces droites par w, et nous l'appellerons *droite des inflexions*.

Il s'ensuit que :

La courbe fondamentale du sixième ordre de Σ se réduit à la droite des inflexions w, à la droite de l'infini h_∞, qui est perpendiculaire à w, et aux deux droites comptées doublement i_∞ et j_∞.

Par ce théorème on caractérise complètement la nature de la correspondance cubique.

([1]) Voir F. Klein, *Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie* (*Math. Annalen,* t. IV, p. 601).

4. Les formes géométriques qui se correspondent dans les deux espaces sont, conformément à la nature spéciale de la courbe fondamentale, d'un caractère particulièrement simple. Sans entrer dans de grands développements, remarquons que le faisceau de plans E^3 de Σ', qui correspond à une droite g de Σ, et la courbe gauche r^3 de Σ qui est adjointe à une droite g' de Σ', sont déjà connus.

Le faisceau E^3 a été étudié par Halphen (¹) et par l'auteur.

En ce qui concerne la courbe r^3, elle est un cas particulier de la courbe du troisième ordre, sur laquelle M. Hurwitz a appelé dernièrement l'attention (²). Soient en effet g'_0, g'_1, g'_2 trois positions de g' dans le mouvement inverse, la courbe r^3 résultera de l'intersection de trois faisceaux congruents de plans dont les axes sont g'_0, g'_1, g'_2. Elle est donc l'intersection commune des trois hyperboloïdes orthogonaux engendrés par les trois faisceaux pris deux à deux. Or sur chacun de ces hyperboloïdes se trouve une droite u qui est parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal et perpendiculaire sur une direction de sections circulaires. Dans le cas qui nous intéresse, les trois axes du mouvement hélicoïdal sont parallèles ; c'est pourquoi les trois hyberboloïdes ont une direction commune de sections circulaires, et dans chacun des plans de section les cercles se coupent en un point R de r^3, ainsi qu'aux points cycliques. La courbe r^3 est donc située sur un hyperboloïde de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal ; elle est, par suite, un cas particulier de la famille de courbes étudiée par M. Hurwitz. Son point réel à l'infini est le point à l'infini sur les axes du mouvement hélicoïdal.

5. A un plan quelconque de Σ correspond en général dans l'espace Σ' une surface du troisième ordre. En particulier, lorsque le plan est perpendiculaire à la direction de l'axe, il contient les points I_∞ et J_∞. C'est pourquoi la surface du troi-

---

(¹) *Sur le mouvement d'une droite* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. I, p. 114).

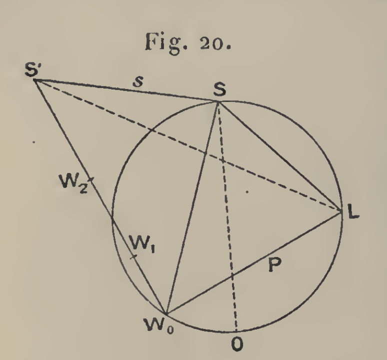
(²) *Ueber eine besondere Raumcurve* 3. *Ordnung* (*Math Annalen*, t. XXX, p. 291).

sième ordre se décompose alors en trois gerbes de plans; deux d'entre elles ont respectivement I_∞ et J_∞ pour sommet. Nous désignerons par S′ le sommet de la troisième gerbe et nous arrivons au résultat suivant :

Les plans osculateurs aux trajectoires des points d'un plan η *perpendiculaire à la direction de l'axe se coupent tous en un même point* S′.

La projection sur ε d'un point quelconque P de Σ décrit dans ε la trajectoire correspondant au roulement de la courbe c sur c'. Soit maintenant (*fig.* 20) W le point du plan η qui appartient à la droite des inflexions w, la projection sur ε de W_0, W_1, W_2 sera une droite. Le point W_0 est donc un point du *cercle des inflexions* de ε, correspondant aux trois positions $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Mais, d'après des propriétés connues du mouvement plan, la droite qui renferme les trois positions considérées du point W de ε passe par un point déterminé du cercle des inflexions, le pôle des inflexions S. De là il suit que la droite $W_0 W_1 W_2$ rencontre la normale s élevée en S sur ε. Donc :

Fig. 20.



Le point S′ *où concourent les plans osculateurs* π' *de tous les points* P *de* η *est le point d'intersection de la droite* $W_0 W_1 W_2$ *avec la normale* s *au plan* ε *menée par le pôle des inflexions* S.

6. La gerbe S′ de plans π' et les points P de η sont en situation perspective en ce sens que tout plan π' passe par le point P qui lui correspond. Mais la correspondance entre les deux formes n'est pas, et nous allons le faire voir, du premier ordre; elle est quadratique. Pour simplifier l'exposition nous transporterons les dénominations de *pôle des inflexions* et de *cercle des inflexions* du plan ε au plan η.

Soit maintenant E^3 le faisceau de plans du troisième ordre de Σ' auquel correspond une droite quelconque g de Σ [1],

---

[1] Mannheim a cru, pour le déplacement spécial qu'il considère, que le

tout point d'intersection de g avec une des droites w et h_∞ réduit d'une unité l'ordre de E^3. A une droite g quelconque située sur η correspond donc un cône de deuxième classe dont le sommet est évidemment en S′, et il s'ensuit effectivement que :

La gerbe de plans S′ *et les points* P *de* η *sont en correspondance quadratique.*

Les points principaux de η sont W, J_∞ et I_∞. A chaque faisceau de plans de S′ correspond donc sur η un cercle. Mais pour tout plan π' passant par s la projection sur ε des points P_0, P_1, P_2 qu'il contient est une droite ; *donc au faisceau de plans dont l'axe est* s *correspond le cercle des inflexions de* η *ou* ε. En se basant sur ce résultat, il est facile de déterminer le cercle de η correspondant à un faisceau quelconque de la gerbe S′. Il passe en effet par W, par le point A où η est coupé par l'axe du faisceau et enfin par le point L du cercle des inflexions qui est en même temps sur la droite SA.

Les plans principaux de S′ forment le trièdre déterminé par les droites S′W, $S'I_\infty$ et $S'J_\infty$. L'unique face réelle est parallèle à η. Elle correspond à *tout* point de la droite h_∞ de η et nous le désignerons par σ'. Le cône de la seconde classe qui correspond à une droite quelconque g de η se réduit au cas où g passe par W à un faisceau de plans du premier ordre. Soit encore L le point du cercle des inflexions qui est situé sur g, le plan λ' qui contient L et s est le plan correspondant au point L ; l'axe a' du faisceau de plans qui correspond à g est donc la droite d'intersection de λ' et σ'.

Les axes a' *des faisceaux de plans correspondant à toutes les droites passant par* W *forment donc un faisceau de rayons égal à celui formé par les droites* g.

D'après cela, on peut facilement construire le plan π' correspondant à un point quelconque de η. Menez la droite PW, par son point d'intersection L, avec le cercle des inflexions et par S menez également une droite ; la parallèle à cette der-

faisceau E^3 est un cône de deuxième classe. Il a démontré seulement que E^3 possède un cône asymptotique de deuxième classe.

nière qui passe par S′ est l'axe du faisceau auquel appartient π'. Le plan mené par cette droite et le point P est osculateur à la trajectoire de P ([1]).

Pour faire une application, déterminons le cône $\varkappa^2$ qui correspond à une droite quelconque g de η. A cet effet imaginons la droite g projetée de W, et coupons ce faisceau de rayons par le cercle des inflexions de η. Maintenant nous construisons le faisceau dont le centre est en S et dont les rayons coupent les précédents sur le cercle des inflexions. Soient p_w et p_s les rayons qui correspondent à un point P de g. Menons par S′ le rayon p'_s parallèle à p_s, le plan déterminé par p'_s et P est le plan π'. C'est pourquoi le faisceau de rayons engendré par p'_s nous donnera avec la ponctuelle g qui lui est projective le cône demandé. Mentionnons encore ce fait, que *les résultats précédents s'appliquent à chacun des deux systèmes de l'espace.*

B. Les points qui présentent une propriété stationnaire.

7. Lorsqu'un système se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, il existe à chaque instant certains points qui décrivent des éléments de trajectoire dont les propriétés sont stationnaires. Les points pour lesquels la *tangente est stationnaire*, en faisant toujours abstraction des points à l'infini, forment la *courbe des inflexions* c^3; les points à *plan osculateur stationnaire* sont sur une surface du troisième ordre F^3, enfin, les points à *axe de courbure* et à *sphère osculatrice* stationnaires sont sur une courbe k^6 et une surface F^4. Il s'agit de voir comment se modifient ces surfaces et ces courbes dans le mouvement étudié ici.

Nous avons déjà vu que la courbe des inflexions c^3 se décompose en trois droites, dont l'une w qui est toujours réelle reste à distance finie, tandis que les deux autres sont rejetées à l'infini. Les droites w engendrent pendant la durée du mouvement une surface que nous désignerons par $\mathfrak{W}$ et que nous nommerons la *surface* des inflexions.

([1]) Comme conséquence des résultats précédents, il est facile d'établir les formules qui relient les points P aux plans π'.

Pour trouver les points à *plan osculateur stationnaire*, nous partirons de quatre positions du système, Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3. Le plan $P_0 P_1 P_2$ qui correspond au point P sera désigné par π' comme plus haut. Enfin désignons par π'' le plan $P_1 P_2 P_3$, nous chercherons pour quels points les plans π' et π'' sont identiques. Or, pour tous les points P de η les plans π' forment une gerbe dont le sommet est en S'; de même, les plans π'' formeront une gerbe ayant son sommet en S''.

Les points cherchés sont donc ceux pour lesquels les plans π passent par S' et S''. Or, au faisceau de plans dont l'axe est $S'S''$ correspond sur η un cercle qui passe par le point d'intersection A de $S'S''$ avec η ainsi que par W_0 et V_1, en désignant par V le point pour lequel V_1, V_2, V_3 sont en ligne droite [1]. Désignons ce cercle par e, et passons au cas d'un déplacement continu. Nous aurons ce résultat :

Les points dont les trajectoires ont des plans osculateurs stationnaires forment à chaque instant un cylindre circulaire, qui est tangent à la surface des inflexions $\mathfrak{W}$ le long de la droite instantanée des inflexions. Les plans osculateurs eux-mêmes forment un faisceau du premier ordre pour tous les points d'une section normale au cylindre.

Nous désignerons ce cylindre par $\mathcal{E}$. Pour le mouvement plan du plan ε sur lui-même, il existe à chaque instant un point dont la trajectoire possède un point d'ondulation; c'est le point où le cercle instantané des inflexions touche son enveloppe. Il est clair que le cylindre $\mathcal{E}$ renferme une droite passant par ce point.

Considérons encore une cinquième position Σ_4, il existera encore un cylindre $\mathcal{E}_1$ correspondant aux quatre positions Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4. Il contient la droite w qui a été mentionnée plus haut; son intersection avec $\mathcal{E}$ se compose donc en outre d'une droite f dont chaque point reste dans le même plan pour les cinq positions du système. Donc :

Il existe à chaque instant une droite dont les points ont

---

[1] Sur ce cercle se trouvent aussi les points T et U pour lesquels U_0, U_1, U_3, et T_0, T_2, T_3 sont en ligne droite.

avec les plans osculateurs de leurs trajectoires un contact du quatrième ordre.

L'enveloppe de tous les cylindres circulaires $\mathfrak{C}$ *se décompose en deux surfaces cylindriques de significations géométriques différentes.*

L'une d'elles se compose des droites des inflexions, l'autre contient les points dont la trajectoire a un contact du quatrième ordre avec son plan osculateur.

8. Pour étudier les points à *cercle de courbure stationnaire* ou à *axe de courbure stationnaire*, nous considérerons encore trois positions quelconques Σ_0, Σ_1, Σ_2. Au moment où le système occupe chacune de ces positions, chaque point a un plan normal déterminé; nous désignerons ces plans par $\pi_0^\vee$, $\pi_1^\vee$, $\pi_2^\vee$. Or nous savons que tous les points de Σ forment à chaque instant un système focal avec leurs plans normaux; c'est pourquoi les plans normaux $\pi_0^\vee$, $\pi_1^\vee$, $\pi_2^\vee$ de tous les points de η forment trois gerbes collinéaires, et trois plans correspondants qui se coupent suivant la même droite fournissent l'axe de courbure stationnaire d'un point P de η. Or il existe six pareils groupes de trois plans, et six points de η à axe stationnaire. Dans le cas présent, trois sont à l'infini; car les plans normaux de la droite à l'infini h_∞ de η forment un faisceau de plans dont l'axe $h^\vee$ est l'axe instantané du déplacement; c'est pourquoi les axes $h_0^\vee$, $h_1^\vee$, $h_2^\vee$ sont parallèles. Donc il ne reste que trois points de l'espèce considérée situés à distance finie et :

En général, il existe à chaque instant trois droites situées à distance finie, dont les points possèdent un axe de courbure stationnaire.

Nous désignerons ces droites par k, l, m.

Soient maintenant $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ quatre positions du système; les points P dont les plans normaux $\pi_0^\vee, \pi_1^\vee, \pi_2^\vee, \pi_3^\vee$ se coupent au même point seront, pour des positions infiniment voisines du système, des points à *sphère osculatrice stationnaire.*

Si g est une droite quelconque de η, et que $g_0^\vee$, $g_1^\vee$, $g_2^\vee$, $g_3^\vee$ soient les axes des faisceaux correspondants de plans normaux, il existe, comme on sait, quatre points de g dont les

quatre plans normaux se coupent en un même point. Parmi eux se trouve toujours le point à l'infini de g, car ses quatre plans normaux sont tous parallèles à la direction de l'axe. Les points I_∞ et J_∞ satisfont aussi à la condition. Donc :

Les points dont la trajectoire a une sphère osculatrice stationnaire forment à chaque instant une surface cylindrique du troisième ordre $\mathcal{H}^3$ qui contient les droites i_∞ et j_∞.

Sur cette surface se trouvent aussi les droites k, l, m ainsi que la droite f. Ces quatre droites forment avec i_∞ et j_∞ l'intersection complète de $\mathcal{H}^3$ et de $\mathcal{C}$. Enfin, les droites k_1, l_1, m_1 sont aussi sur $\mathcal{H}^3$.

Ajoutons aux quatre positions une cinquième Σ^4, nous obtiendrons une seconde surface $\mathcal{H}_1^3$; elle coupe $\mathcal{H}^3$ suivant neuf droites, parmi lesquelles se trouvent i_∞, j_∞ ainsi que k_1, l_1, m_1.

Les quatre autres droites d'intersection fournissent des points dont la trajectoire a un contact du cinquième ordre avec sa sphère osculatrice. Donc :

A chaque instant il existe, en général, quatre droites lieu des points dont les trajectoires ont avec leur sphère osculatrice un contact du cinquième ordre.

L'enveloppe des surfaces $\mathcal{H}^3$ se décompose en deux surfaces cylindriques. L'une contient les points pour lesquels la sphère osculatrice à la trajectoire a un contact du cinquième ordre avec cette courbe, l'autre se compose des points à cercle de courbure stationnaire.

9. Des théorèmes précédents on peut, d'une manière que l'on connaît, déduire une série de conséquences pour le mouvement inverse du système Σ', et tous ces résultats s'appliquent indistinctement au mouvement direct et au mouvement inverse. Les surfaces et les courbes ainsi mises en évidence ont entre elles, comme l'a fait voir l'auteur ([1]), des relations réciproques simples.

Nous allons maintenant faire ressortir d'une manière plus

([1]) *Comptes rendus*, t. CI, p. 150.

détaillée l'analogie dont nous avons parlé et qui existe entre les théorèmes précédents et ceux relatifs au mouvement plan.

MOUVEMENT PLAN.	MOUVEMENT DANS L'ESPACE LES SURFACES DES AXES ÉTANT CYLINDRIQUES.
La courbe polaire est le lieu des centres instantanés C.	*La surface cylindrique* $\mathfrak{W}$ *est le lieu des droites des inflexions* w.
Il existe un cercle des inflexions qui contient un point d'ondulation U.	*Sur le cylindre circulaire* $\mathcal{E}$ *se trouve la droite* f, *lieu des points pour lesquels le contact, entre la trajectoire et son plan osculateur, est du quatrième ordre.*
L'enveloppe des cercles des inflexions se décompose en courbe polaire c *et lieu des points* U.	*L'enveloppe de tous les cylindres* $\mathcal{E}$ *se compose de la surface* $\mathfrak{W}$ *et du lieu des droites* f.
Les tangentes d'inflexion forment un faisceau du premier ordre.	*Les plans osculateurs stationnaires forment un faisceau du premier ordre.*
Les droites qui touchent leurs enveloppes en des points de rebroussement forment un faisceau de rayons.	*Les plans qui touchent leurs enveloppes suivant des plans de rebroussement forment un faisceau de plans.*
Les points à cercle de courbure stationnaire forment une courbe k^3 *qui contient les points cycliques.*	*Les points à sphère osculatrice stationnaire forment une surface cylindrique* $\mathcal{K}^3$ *qui passe par les points circulaires à l'infini sur une direction perpendiculaire à l'axe.*

C. Le déplacement particulier où chaque point de l'espace décrit une ellipse.

10. Lorsque trois points A, B, C d'un plan η perpendiculaire à la direction de l'axe ont la propriété de se mouvoir dans des plans α', β', γ' qui ne passent pas par la même droite, la même chose aura lieu pour tous les points. Car soient encore Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3 quatre positions du système, les points que nous avons désignés plus haut (7) par S' et S'' devront tous les deux se confondre avec le point d'intersection des trois plans α', β', γ'. Or le plan $P_0P_1P_2$ passe par

S' et P_1, P_2, P_3 par S''. Donc les deux plans sont identiques et il s'ensuit que :

Si un triangle se meut parallèlement à son plan, de telle façon que ses trois sommets restent sur trois plans fixes, tout point invariablement lié au triangle se meut dans un plan.

A cause de la correspondance quadratique qui existe entre les plans π' et les points P, le point W sera un point fixe de η; chaque point de la droite w décrit donc une droite. De plus (*fig.* 20), au faisceau de plans dont l'axe s est perpendiculaire sur η doit correspondre un cercle fixe de η qui passera toujours par S et W. Ce cercle c est le cercle des inflexions de ε. Si donc L est un point quelconque de ce cercle, son plan λ' est perpendiculaire sur η, et la trajectoire de L dans ε est une droite passant par S. Le mouvement du plan ε sur lui-même, mouvement qui est connexe au mouvement dans l'espace, est donc défini par ce fait que tout point L du cercle c se meut sur une droite passant par S. Ce déplacement est donc identique avec celui où tout point P décrit une ellipse E_p. Et en ce qui concerne le déplacement dans l'espace, chaque point P décrit l'ellipse suivant laquelle le plan π' coupe le cylindre elliptique dont la base est E_p. Donc :

Si un triangle se déplace de telle façon que ses sommets se meuvent sur trois plans fixes, tout point invariablement lié au triangle décrit une ellipse; pour tous les points d'une droite w perpendiculaire sur ε, les ellipses se transforment en droites.

Dans le mouvement du plan ε sur lui-même, le cercle c est la roulette; la base de la roulette est un cercle c' de rayon double, sur lequel c roule intérieurement.

D'ailleurs S est le centre de ce cercle.

Donc :

Si un système Σ doit se déplacer de telle façon que chaque point décrive une courbe plane, cela ne peut avoir lieu qu'à condition qu'un cylindre circulaire $\mathfrak{C}$ de Σ roule à l'intérieur d'un cylindre circulaire de rayon double, et glisse en même

temps le long de celui-ci, de telle sorte qu'un point de Σ reste dans un plan fixe (¹).

11. Il est intéressant de rechercher ce que deviennent dans le mouvement étudié les surfaces et les courbes lieux des points à éléments stationnaires. Il est d'abord évident que tous les points satisfont à la condition imposée aux points de la surface $\mathcal{E}$; il ne peut donc s'agir que de points à cercle de courbure stationnaire. Ce sont ceux qui passent à l'instant considéré par un sommet de leur ellipse trajectoire; en d'autres termes, il s'agira donc de chercher à chaque instant le lieu des extrémités des axes de ces ellipses. On voit immédiatement que tout plan ε doit contenir une infinité de ces

---

(¹) L'énoncé de ce théorème suppose connu ce résultat dû à M. Darboux, à savoir que le seul mouvement dans lequel toutes les trajectoires des plans sont planes est celui où tous les points décrivent des ellipses.

Voici la démonstration de M. Darboux.

On peut supposer qu'un certain nombre de plans de l'espace seulement sont décrits par les points mobiles. Ce cas se ramène à un déplacement de la figure parallèlement à un plan fixe.

Ou bien tous les plans sont décrits par les points mobiles.

Alors, dans le mouvement inverse, tous les plans passent par des points fixes.

Soient deux plans parallèles de la figure mobile π et F_1; pendant le déplacement, ils seront toujours à la même distance l'un de l'autre, et comme chacun d'eux pivote autour d'un point fixe, le premier sera tangent à une sphère dont le centre est le point fixe par lequel passe le second.

On peut donc énoncer ce théorème :

Si une figure de l'espace peut se déplacer de manière que tous ses plans passent par des points fixes, ces plans envelopperont des cônes de révolution.

Et comme la classe de l'enveloppe des plans dans le mouvement inverse est égale à l'ordre des trajectoires des points dans le mouvement direct, nous pourrons ajouter :

Si une figure de l'espace peut se déplacer de manière que les trajectoires de tous les points soient planes, ces trajectoires sont des coniques.

Resterait à montrer que le mouvement le plus général où tous les points décrivent des coniques est bien celui qui a été étudié. Pour la démonstration voir le Mémoire déjà cité de M. Mannheim (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier LX).

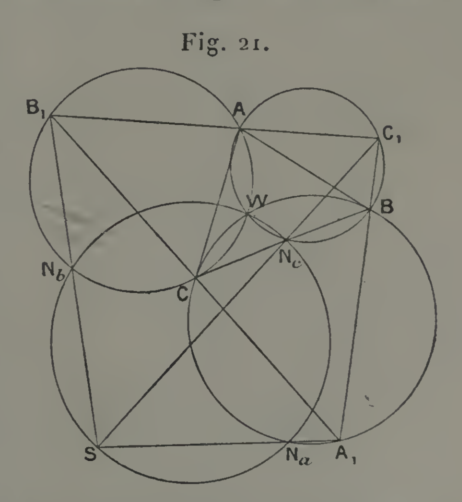
points, tandis que dans le cas général ε n'en contient que trois.

Considérons trois positions du système, Σ_0, Σ_1, Σ_2. Pour une droite quelconque g située dans le plan ε, les plans normaux instantanés forment les trois faisceaux projectifs g_0^ν, g_1^ν, g_2^ν. Les faisceaux g_0^ν et g_1^ν d'une part, g_1^ν et g_2^ν de l'autre, engendrent deux hyperboloïdes, et dans le cas particulier qui nous occupe, les génératrices de ces surfaces sont parallèles deux à deux, car les génératrices correspondant à un point P de g sont toutes les deux perpendiculaires sur le plan π'. Les deux systèmes réglés ainsi déterminés sont projectifs et rencontrent tous deux la droite g_1^ν; donc il existe à chaque instant sur g deux points à axe de courbure stationnaire. Comme les points cycliques I_∞ et J_∞ sont à considérer comme des points à axe de courbure stationnaire, tous ces points forment un cercle qui passe par W.

Donc *les points qui passent par un sommet de leur ellipse trajectoire sont à chaque instant sur un cylindre circulaire qui contient la droite w.*

12. Il nous reste à faire voir comment on peut, étant donné le déplacement du triangle, construire à chaque instant l'axe du déplacement et les autres éléments déterminants du mouvement.

Fig. 21.



Soient (*fig.* 21) A, B, C les sommets du triangle, α', β', γ' les plans correspondants; soient S' le point d'intersection de ces plans et S sa projection sur le plan du triangle ε. Les arêtes du tétraèdre déterminé par α', β', γ' seront désignées par a, b, c. Enfin A_1, B_1, C_1 seront leurs points d'intersection avec η, de sorte que $A_1 B_1 C_1$ est circonscrit au triangle ABC.

Or, au faisceau de plans dont l'axe est a, il correspond, comme nous l'avons vu plus haut, le cercle k_a qui passe par A_1, B, C, et sur ce cercle se trouve W.

De là il suit que :

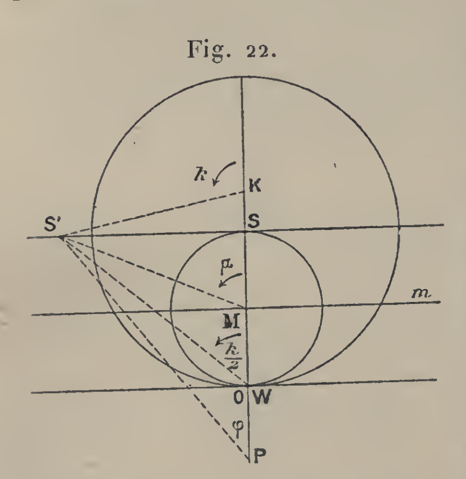
Les trois cercles k_a, k_b, k_c *qui passent par* A_1, B, C; B_1, C, A; *et* C_1, A, B *se coupent au point* W.

Pour le plan ν du faisceau passant par a, qui est normal au plan η, le point N correspondant est sur le cercle des inflexions; d'autre part, c'est le point d'intersection du cercle k_a avec SA_1. Donc : *Les points* N_a, N_b, N_c *où les cercles* k_a, k_b, k_c *sont coupés par* SA_1, SB_1, SC_1 *sont sur un même cercle avec* W *et* S; *ce cercle est la courbe polaire du plan* η [1].

Le point S est le pôle des inflexions du mouvement plan; donc l'autre extrémité du diamètre de c qui passe par ce point est le centre instantané du mouvement plan. En même temps S est le centre de la base de la roulette. Enfin on remarquera que, en même temps que le cercle c, on a déterminé le plan π' correspondant à tout point P de ε.

13. Si l'on veut étudier plus complètement le mouvement précédent, il sera avantageux d'adopter la marche suivante. Comme on peut se donner arbitrairement le plan π' correspondant à un point P de Σ, on choisira de préférence un point particulier, tel que le centre M du cercle c. Celui-ci décrit sur le plan ε un cercle dont le centre est en S (*fig.* 22). Nous considérerons en outre comme position initiale du système Σ celle pour laquelle M passe par le point le plus bas de sa trajectoire. La normale m élevée en M sur SM sera la droite d'intersection du plan μ' avec le plan ε ou η et MS sera la projection sur ε du grand axe de l'ellipse E_m décrite par M. Le point W se confond pour cette position avec le centre de rotation, de sorte que S, M, W sont en ligne droite.

Fig. 22.



[1] En ce qui concerne l'énoncé purement géométrique du théorème, on remarquera que S est un point quelconque.

De plus, on voit que le cylindre $\mathfrak{C}$ occupera aussi sa position la plus basse, et qu'une fois qu'il aura accompli une révolution complète sur $\mathfrak{C}'$, il sera arrivé à sa position la plus élevée, et que toutes les particularités du mouvement se présentent d'une façon symétrique pendant les deux phases qui correspondent à la montée et à la descente.

On déduit facilement de cela qu'il existe sur la droite MS un point dont la trajectoire est un cercle ; car, pour tous les points de cette droite, les axes des ellipses trajectoires sont l'un perpendiculaire à MS, tandis que l'autre est dans le plan normal passant par MS. Les axes de l'ellipse décrite par P pendant le mouvement plan dans ε sont

$$a = \mathrm{SP} \qquad \text{et} \qquad b = \mathrm{OP}.$$

Désignons par φ l'angle de π' avec ε, il s'ensuit

$$a_1 = \mathrm{SP} : \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad b_1 = \mathrm{OP},$$

pour les axes de l'ellipse décrite dans le mouvement de l'espace.

Si donc pour le point K on a

$$\mathrm{SK} = \mathrm{OK}\cos k,$$

le point K décrira un cercle. Mais l'équation

$$\mathrm{SK}\,\mathrm{tang}\,k = \mathrm{SM}\,\mathrm{tang}\,\mu$$

donne

$$\cot\frac{k}{2} = 2\cot\mu = \cot \mathrm{S'OS}.$$

Suivant que $2\cot\mu \gtrless 1$ ou $\mathrm{S'S} < 2a$, en désignant par $2a$ le diamètre du cercle c, K se trouvera entre M et S ou de l'autre côté de S, et lorsque en particulier $2\cot\mu = 1$, S lui-même décrira un cercle. Dans ce cas, le cercle est dans un plan perpendiculaire sur WS et sur le plan du Tableau.

Il est facile de voir que K est le seul point de η qui décrit un cercle. Le point K est toujours sur le cercle considéré en 11, et qui est le lieu des sommets des ellipses trajectoires. Comme ce cercle contient W, il suffira d'un seul point pour le déterminer. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de chercher le point d'intersection différent de W avec le cercle des in-

flexions. Soient θ l'angle dont on a tourné la roulette c, et λ l'angle différent de O qu'un point L de ce cercle fait avec la position origine de LW, on a

$$\frac{\sin\theta}{\sin(2\lambda-\theta)}=(2\cot\mu)^2,$$

ce qui détermine un troisième point du cercle.

14. Enfin, nous caractériserons analytiquement la correspondance cubique spéciale qui lie les points P aux plans π'. Soit O l'origine de coordonnées rectangulaires, prenons l'axe du déplacement pour axe des z, la normale à la courbe polaire pour axe des y. Désignons les coordonnées-points homogènes par x, y, z, t; par u, v, w, r les coordonnées-plans. On a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma u &= h\,xt^2,\\
\sigma v &= h\,yt^2,\\
\sigma w &= t\,(x^2+y^2+2dyt),\\
\sigma r &= h\,(x^2+y^2)\,t+2\,(x^2+y^2+2dyt);
\end{aligned}$$

h désigne la longueur SS′ et $2d$ le diamètre du cercle c.

De là on tire

$$\begin{aligned}
\rho x &= 2\,uw\,(hw-dv),\\
\rho y &= 2\,vw\,(hw-dv),\\
\rho z &= (r-hw+dv)\,(u^2+v^2),\\
\rho t &= w\,(u^2+v^2).
\end{aligned}$$

D'après cela, la courbe fondamentale de l'espace Σ se décompose de la manière qui a été indiquée, en quatre droites; tandis que la courbe fondamentale de l'espace Σ' se compose des six droites

$$\begin{aligned}
u &= 0, & v &= 0,\\
w &= 0, & hw-dv-r &= 0,\\
w &= 0, & u+iv &= 0,\\
w &= 0, & u-iv &= 0,\\
hw-dv &= 0, & u+iv &= 0,\\
hw-dv &= 0, & u-iv &= 0.
\end{aligned}$$

NOTE A.

SUR LA CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE LA TRAJECTOIRE D'UN POINT MOBILE.

Dans un Mémoire inséré aux *Annales de l'École Normale* (décembre 1886), M. le général Dewulf a indiqué une construction très générale pour le centre de courbure de la trajectoire d'un point mobile.

Cette construction et les conséquences qui en découlent dérivent des considérations suivantes :

Nous avons vu que, si l'on désigne par M et M′ un point et le centre de courbure de sa trajectoire, le centre instantané étant en O, on a pour un rayon normal quelconque la relation

$$\frac{1}{\text{OM}} + \frac{1}{\text{OM}'} = \text{const.},$$

en tenant compte des conventions faites sur les signes.

Ceci posé, considérons un rayon normal l_m et le point W′ de ce rayon situé sur le cercle des inflexions du mouvement indirect w'.

Traçons par O une droite quelconque xy que nous considérerons comme une ligne de terre, et menons par un point S, pris arbitrairement sur la verticale du point O, un plan horizontal. Projetons le point M de l_m en m sur ce plan, puis le point W′ en W'_1 sur la ligne de terre. Menons SW'_1 et Om : ces droites se coupent en m' qui se projette en M′ sur OM.

Lorsque le point M se déplace sur l_m, la ponctuelle engendrée par m est en situation perspective avec la ponctuelle (M). Par suite, la ponctuelle (m') située sur SW'_1 sera projective à la ponctuelle (M), ainsi que la ponctuelle (M′) qui est perspective à (m).

De plus, par cette construction, au point à l'infini sur l_m correspondra le point W′, et les points unis des deux ponctuelles projectives sont réunis en O. De ces dernières re-

marques, il résulte que le point M', que nous obtenons ainsi, n'est autre que celui que fournirait la relation

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{OW'},$$

où M et M' désignent un point et le centre de courbure de sa trajectoire.

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

Le lieu géométrique des points M' *qui correspond aux points* M *d'une courbe* F_m *est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes : l'un de ces cônes a pour sommet le point* S *pris arbitrairement sur la verticale du centre instantané, et pour base le cercle des inflexions du mouvement indirect* w', *l'autre a pour sommet le centre instantané, et pour base la projection de la courbe* F_m *sur le plan horizontal passant par* S.

Il est en effet bien facile de reconnaître sur la figure que les constructions qui ont été faites pour obtenir le point M' ne sont autres que celles que l'on ferait pour chercher un point de l'intersection des deux cônes, situé dans le plan vertical SOl_m.

De ce qui vient d'être dit on conclut immédiatement que, si la courbe F_m est algébrique et de l'ordre m, le lieu du point M' sera de l'ordre $2m$.

Poursuivons plus complètement l'étude de cette courbe : nous obtiendrons des points de la courbe d'intersection des cônes qui se projettent horizontalement en O, en coupant les deux surfaces par un plan vertical perpendiculaire au plan vertical de projection. En construisant les traces horizontales des plans tangents, on voit que chaque branche de courbe passant par O est tangente en O à la tangente Ot à la courbe polaire.

Le nombre de ces branches est d'ailleurs égal à m.

On a vu dans le cours de cet Ouvrage que, si l'on applique ces propositions à une droite, la conique résultante est non seulement tangente à Ot, mais qu'elle a le cercle w' pour cercle osculateur.

Nous allons voir que cette propriété est générale. En effet, on a

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{1}{OW'},$$

d'où

$$OM' - OW' = \frac{OM' . OW'}{OM}.$$

Lorsque le rayon normal se rapproche indéfiniment de la tangente à la courbe polaire, le produit $OM'.OW'$ est infiniment petit du second ordre, OM restant fini dans le cas général. Donc $OM' - OW'$ est aussi infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que le lieu du point M' admet le cercle w' pour cercle osculateur en O.

Il s'ensuit de tout ceci que :

Le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une courbe F_m *de l'ordre* m *qui ne passe pas par le centre instantané est une courbe de l'ordre* $2m$ *ayant trois points multiples de l'ordre* m *situés sur la circonférence des inflexions du mouvement inverse* w', *et infiniment voisins du centre instantané de rotation, ou, en d'autres termes, ayant* m *branches qui passent au centre instantané, où chacune d'elles est osculée par la circonférence* w'.

Ce théorème peut d'ailleurs se déduire aussi de ce fait que les points M et M' sont, d'après ce qui a été vu à la page 21, en correspondance quadratique, les trois points principaux étant confondus en O.

Lorsque la courbe F_m passe au centre instantané de rotation, la théorie de la correspondance quadratique reste applicable.

Revenons à la conique lieu des centres de courbure des points d'une droite. L'existence de cette courbe a été montrée en 1853 par M. Rivals. Le général Dewulf a proposé de la désigner sous le nom de *conique de Rivals*.

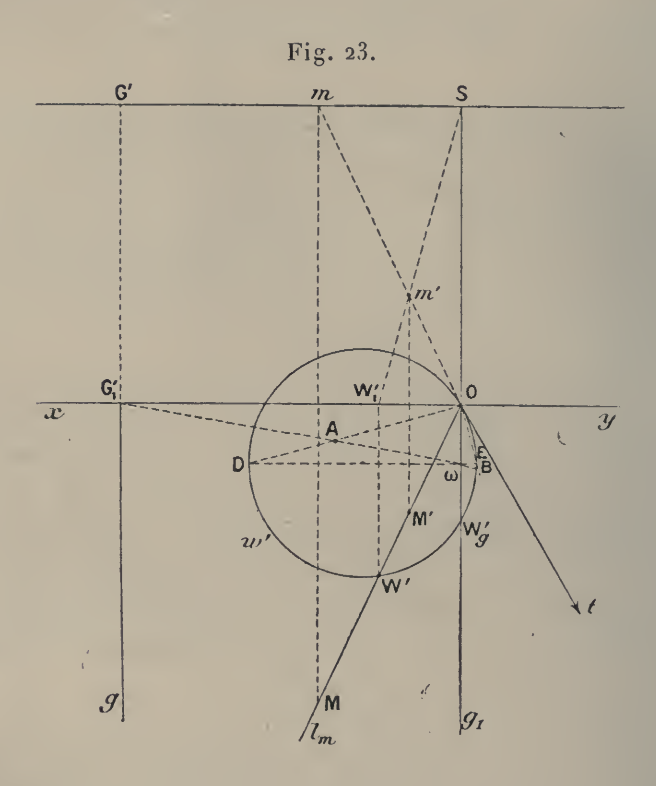
Pour la déterminer plus complètement, nous prendrons la ligne de terre xy perpendiculaire à la droite g dont dérive la conique (*fig.* 23).

Nous désignerons par G' la projection verticale de la droite

qui nous sert avec le point O à définir le plan sécant du cône S.

La conique de Rivals passe en O et par le point W'_g situé sur la parallèle à g menée par O. Il nous est facile d'obtenir le diamètre des cordes de cette direction; car aux extrémités de ce diamètre les tangentes sont parallèles à g.

Fig. 23.



Nous n'avons donc qu'à construire les points A et B situés dans les plans verticaux dont les traces horizontales sont OD et OE. Mais on observera que l'on peut avoir immédiatement ces points, car la trace verticale du diamètre AB étant en G', elle se projette horizontalement au point d'intersection de g et de la ligne de terre. Soit G'_1 ce point, il nous suffira de le joindre au milieu ω de OW'_g pour avoir le diamètre conjugué des cordes parallèles à g. Les points A et B, extrémités de ce diamètre, sont sur OD et OE, le diamètre ED étant parallèle à xy.

Le centre C de la conique de Rivals est au milieu de AB.

Nous voyons que, lorsque la droite g se déplace en restant parallèle à elle-même, le diamètre AB pivote autour du point

ω; les extrémités étant toujours sur les droites OD, OE, on a le théorème suivant :

Le lieu géométrique des centres des coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à OD *et* OE.

Cette hyperbole passe par le centre instantané et par le centre du cercle w'.

On obtient les points à l'infini de la conique de Rivals en traçant les rayons normaux qui joignent au centre instantané les points d'intersection de la droite g avec le cercle des inflexions w'. Ces rayons normaux nous donnent donc la direction des asymptotes. Leurs bissectrices sont parallèles aux axes. Mais il est facile de s'assurer que ces bissectrices coïncident avec OD et OE. Donc :

Les axes des coniques de Rivals qui correspondent à un système de droites parallèles sont tous parallèles entre eux et aux asymptotes de l'hyperbole, lieu géométrique de leurs centres.

De la construction qui a été donnée pour la conique de Rivals résulte encore une démonstration simple de ce fait que la conique et le cercle w' sont des courbes homologiques.

Joignons en effet deux points A et B de la conique de Rivals d'une droite g au point O. OA et OB coupent le cercle w' en A_1 et B_1. Désignons par A' et B' les points de l'intersection du plan sécant $O g_1$ et du cône S dont A et B sont les projections. Les droites AB et $A'B'$ se coupent sur la trace horizontale du plan. Il en est de même pour $A'B'$ et A_1B_1. Donc les droites AB et A_1B_1 concourent aussi sur cette droite. Par suite :

La conique de Rivals d'une droite g et le cercle des inflexions du mouvement inverse sont des courbes homologiques.

Le centre d'homologie est le centre instantané de rotation et l'axe d'homologie est la parallèle à la droite g menée par le centre instantané de rotation.

NOTE B.

SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE DROITE DONT TOUS LES POINTS DÉCRIVENT DES SPHÈRES.

On a étudié, Chap. III (XIII, 7), un mode de déplacement d'une droite où tous les points décrivent des ellipsoïdes. Le déplacement était déterminé par la condition que trois points de la droite se déplacent dans des plans.

Considérons maintenant le cas où trois points d'une droite seraient assujettis à décrire des sphères dont les centres seraient en ligne droite.

Soient donc E, F, G trois points d'une droite l invariablement liés à trois points E′, F′, G′ en ligne droite sur l'.

Les normales aux trajectoires de E, F, G passent respectivement par E′, F′, G′.

La conjuguée de l est une génératrice de l'hyperboloïde que déterminent ces trois droites. La normale à la trajectoire d'un point L de l rencontre donc cette génératrice γ et est située dans le plan déterminé par γ et L. Or ce plan rencontre la droite l' en un point L′ qui est fixe.

Car LL′, étant située sur l'hyperboloïde, le rapport anharmonique $(E'F'G'L') \equiv (EFGL)$. Il s'ensuit donc que LL′ est de longueur constante, et que L décrit une sphère.

Il peut arriver que, pour un point M, M′ soit à l'infini. Alors MM′ est parallèle à l'; le point M décrit un plan.

Ce déplacement a été étudié par M. Darboux.

FIN.

APPENDICE.

NOTIONS GÉOMÉTRIQUES

SUR LES

COMPLEXES ET LES CONGRUENCES

DE DROITES;

Par G. FOURET.

AVANT-PROPOS.

C'est, comme on le sait, dans l'étude de la statique et de la cinématique des solides invariables que Möbius et Chasles ont, pour la première fois, découvert et signalé les propriétés importantes des complexe et congruence linéaires et du complexe tétraédral [1]. Il y avait intérêt à édifier ces théories sur une base plus large, en leur restituant leur caractère géométrique abstrait. C'est là le but que se sont proposé et ont réalisé Plücker et les nombreux géomètres qui l'ont suivi dans cette voie. C'est au même point de vue que nous essayons ici de présenter, en quelques pages, les premiers éléments d'une théorie qui occupe peu de place dans les traités didac-

---

[1] Le complexe tétraédral n'apparaît dans ces recherches que sous une forme particulière. C'est M. Reye qui, plus tard, l'a étudié le premier sous sa forme la plus générale.

tiques publiés dans notre pays. Nous nous sommes efforcé d'unir la simplicité à la rigueur, en faisant usage des principes et des procédés les plus généraux de la Géométrie moderne [1], qui, on le reconnaît aujourd'hui, sont à l'abri de toute critique, lorsqu'on leur donne l'Algèbre pour base. Il nous a paru intéressant d'exposer, dans le même esprit, les notions fondamentales relatives aux lignes ou surfaces focales des congruences et aux surfaces des singularités des complexes. Enfin nous avons cru devoir donner le mode de génération le plus simple des congruences du premier ordre et de classe quelconque.

Le présent opuscule n'était pas encore entièrement rédigé, lorsqu'a paru en Allemagne un Ouvrage conçu dans le même esprit, mais d'une importance considérable [2]. Nous nous sommes imposé néanmoins de ne lui faire aucun emprunt, pour maintenir cette étude, avec son originalité propre, dans le cadre que nous nous étions tracé.

INTRODUCTION.

1. Imaginons l'ensemble des droites de l'espace qui obéissent à une même loi bien déterminée, de telle sorte que celles de ces droites qui passent par un même point, d'ailleurs arbitraire, forment un cône. Nous considérerons une pareille loi comme une *condition simple* et nous donnerons le nom de *complexe* à l'ensemble des droites qui y satisfont.

Tout cône, formé par celles de ces droites qui passent par

---

[1] On les trouvera exposés notamment dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse.

[2] *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, von Dr Rudolf Sturm.

un même point quelconque, sera appelé *cône du complexe.* Lorsque les cônes d'un complexe seront algébriques, le complexe sera lui-même algébrique et d'un *ordre* marqué par le degré de ces cônes.

2. Les droites d'un complexe situées dans un même plan enveloppent une certaine courbe, dite *courbe du complexe.* Il est facile de voir que ces courbes seront algébriques, lorsque le complexe sera lui-même algébrique et qu'en pareil cas leur classe sera égale à l'ordre du complexe. En effet, les tangentes à une telle courbe, issues d'un point quelconque de son plan, sont à l'intersection du plan avec le cône du complexe qui a ce point pour sommet. Le nombre de ces tangentes, c'est-à-dire la classe de la courbe, est donc égal au degré du cône et, par conséquent, à l'ordre du complexe.

3. Les droites de l'espace, qui obéissent à une même loi équivalant à deux conditions simples bien déterminées, forment une *congruence.* Ces droites sont communes aux deux complexes définis respectivement par les deux conditions. Lorsque les deux complexes sont algébriques, la congruence l'est également.

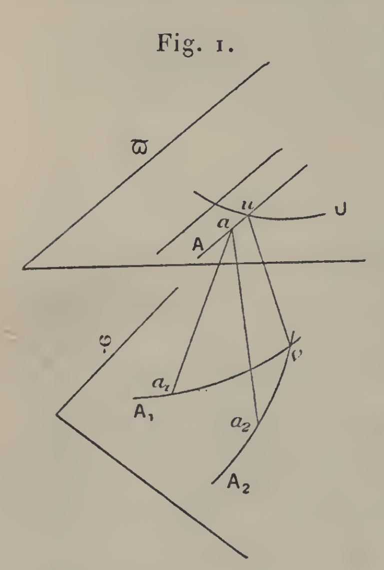
Le nombre des droites d'une congruence algébrique qui passent par un point quelconque est l'*ordre* de cette congruence. Ces droites sont données par l'intersection des cônes des deux complexes qui ont ce point pour sommet commun. Désignons par m et m' les ordres respectifs des deux complexes. D'après le théorème de Bézout, le nombre des génératrices communes aux deux cônes, dont les degrés sont m et m', est mm'. Tel sera généralement l'ordre de la congruence. Mais il arrivera souvent aussi qu'une ou plusieurs des génératrices communes aux deux cônes devront être écartées, comme n'obéissant pas fidèlement à la loi imposée aux droites de la congruence ([1]). L'ordre de cette congruence sera alors inférieur à mm' d'une ou de plusieurs unités.

([1]) Un fait analogue se présente, comme on le sait, pour une courbe gauche qui n'est pas l'intersection complète de deux surfaces.

4. Le nombre des droites d'une congruence contenues dans un plan arbitraire est la *classe* de cette congruence. Ces droites sont les tangentes communes aux courbes des deux complexes situées dans le plan. Le nombre de ces tangentes communes, en vertu du théorème de Bézout, est au plus égal à mm'. Telle sera, dans bien des cas, la classe de la congruence. Mais souvent aussi ce nombre subira une réduction, soit parce que les tangentes communes aux deux courbes, à distance finie, seront en nombre inférieur à mm', soit parce que certaines de ces tangentes communes ne satisferont pas exactement à la loi qui définit la congruence.

5. L'ensemble des droites de l'espace, régies par une même loi équivalant à trois conditions simples, forme une *série continue de droites*, c'est-à-dire, en général, une *surface réglée*. C'est ce qu'il est facile de voir. Désignons, à cet effet, par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ les trois conditions simples et appelons $\mathcal{C}_1$ la congruence définie par les conditions $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, $\mathcal{C}_2$ la congruence définie par les conditions $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}''$. Considérons, dans un plan ϖ pris arbitrairement, une série continue de droites parallèles et soit A l'une de ces droites (*fig.* 1).

Fig. 1.



Par chaque point a de A passent un certain nombre de droites telles que aa_1, appartenant à la congruence $\mathcal{C}_1$ et un certain nombre de droites telles que aa_2, appartenant à la congruence $\mathcal{C}_2$. Les traces respectives a_1 et a_2 de ces droites sur un même plan arbitraire φ décrivent des courbes distinctes A_1 et A_2. Ces courbes se coupent en un certain nombre de points tels que v, qui sont les traces sur le plan φ de droites telles que uv, rencontrant A et communes aux congruences $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, c'est-à-dire satisfaisant aux trois conditions $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$. Lorsque la droite A se meut dans le plan ϖ parallèlement à elle-même, les points tels que u décrivent une ligne U et les droites telles que uv, qui se dé-

placent d'une manière continue en s'appuyant sur U, engendrent une *surface réglée*.

Dans certains cas exceptionnels, il pourra arriver que les points tels que v décrivent une ou plusieurs droites dans le plan φ, de telle manière que les droites uv se meuvent respectivement dans un ou plusieurs plans. La série réglée se composera alors des tangentes à une ou plusieurs courbes planes.

6. Les surfaces réglées algébriques se distinguent par leur *degré*, c'est-à-dire par le nombre de leurs points de rencontre avec une droite quelconque. On voit immédiatement, dans le cas d'une surface gauche, que ce nombre est égal à celui des plans tangents menés par une droite quelconque à une pareille surface, c'est-à-dire égal à la *classe* de cette surface. En effet, chacun des plans tangents menés par une droite quelconque D à une surface gauche σ contient la génératrice de la surface qui passe par son point de contact avec le plan. La droite D rencontre, par suite, cette génératrice en un point qui appartient à σ. Inversement, par tout point d'intersection de D avec σ passe une génératrice de cette surface et le plan qui passe par cette génératrice et par D est tangent à σ. Donc les plans tangents menés par D à la surface σ sont bien en même nombre que les points d'intersection de D avec cette surface.

7. Les droites de l'espace, régies par une même loi équivalant à quatre conditions simples, forment un *groupe de droites* isolées, dont le nombre peut d'ailleurs être limité ou illimité. En effet, les droites qui satisfont à trois des conditions forment une surface ou une série réglée et il est bien clair que, parmi ces droites se succédant d'une manière continue, il y en aura une ou plusieurs qui satisferont à la quatrième condition.

Ainsi, en résumé, une droite engendre un *complexe*, une *congruence* ou une *série réglée* suivant que la loi de son déplacement équivaut à une, deux ou trois conditions simples. Une droite assujettie à une loi qui vaut quatre conditions simples occupe dans l'espace une ou plusieurs po-

sitions déterminées et donne naissance à un groupe de droites.

8. Donnons quelques exemples de conditions simples. C'est pour une droite une *condition simple* de rencontrer une droite ou une courbe, d'être parallèle à un plan ou à une des génératrices rectilignes d'un cône, de faire un angle déterminé avec un plan ou avec une droite. Les droites, passant par un point quelconque et satisfaisant à une loi de ce genre, forment en effet un cône (n° 1).

On soumet une droite à une *condition double*, c'est-à-dire équivalente à deux conditions simples, en l'assujettissant à passer par un point, à rencontrer une courbe en deux points, à être doublement tangente à une surface, à être normale à une droite, à une courbe ou à une surface; car les droites, passant par un point quelconque et obéissant à une loi de cette nature, sont en nombre limité [1] (n° 3).

On impose à une droite une *condition triple* en l'assujettissant à rencontrer une courbe en trois points, à être tangente, normale principale ou binormale d'une certaine courbe, à être triplement tangente à une certaine surface; car il existe une série continue de droites satisfaisant à une pareille définition (n° 5).

Il est clair, enfin, qu'il ne saurait y avoir qu'une droite ou un nombre fini de droites rencontrant une même courbe en quatre points, quadruplement tangentes à une même surface (n° 7). Une pareille condition est une *condition quadruple*.

---

[1] Être contenue dans un certain plan constitue également, pour une droite, une condition double. Cela résulte de ce que cette droite est complètement déterminée, quand on l'assujettit à deux autres conditions simples, par exemple à rencontrer deux droites données.

CHAPITRE I.

COMPLEXE LINÉAIRE. — SYSTÈME FOCAL.

I. — Pôles et plans polaires. Plans diamétraux. Diamètres et axe. Propriétés linéaires.

9. Le complexe le plus simple est le complexe du premier ordre ou *complexe linéaire*. Parmi les droites qui le composent, celles qui passent par un même point sont situées dans un même plan et, réciproquement, celles qui sont dans un même plan passent par un même point. Cette double définition du complexe linéaire n'est qu'un cas particulier de la double définition des complexes d'un ordre quelconque (nº 1).

Un complexe linéaire, comme on vient de le voir, établit, entre les divers points et les divers plans de l'espace, une corrélation de telle nature qu'à tout point correspond un plan passant par ce point et à tout plan un point contenu dans ce plan. L'ensemble de ces couples, composés chacun d'un point et d'un plan, a reçu le nom de *système focal* [1]. Le point corrélatif d'un plan s'appelle *foyer* ou *pôle* de ce plan. Le plan corrélatif d'un point est le *plan focal* ou *plan polaire* de ce point. Nous adopterons ici de préférence les dénominations de pôle et de plan polaire.

Le pôle du plan de l'infini se trouve dans une direction bien déterminée que nous appellerons la *direction axiale* du complexe ou du système focal correspondant. Nous désignerons sous le nom de *plan diamétral* un plan dont le pôle est à l'infini.

Le complexe linéaire et le système focal qui lui correspond présentent des propriétés très intéressantes. Nous allons

---

[1] Les géomètres allemands donnent à un pareil assemblage le nom de *Nullsystem*.

les passer en revue et en déduire le mode de génération le plus simple de ce complexe

10. *Le plan polaire χ, d'un point q, situé dans un plan ϖ, passe par le pôle p du plan ϖ.*

En effet, le point q, appartenant par hypothèse à ϖ et par définition à χ, est sur la droite d'intersection de ces deux plans. Cette droite fait donc partie du complexe linéaire et, comme elle est dans le plan ϖ, elle passe par le pôle p de ce plan. Le plan χ, contenant la droite, contient par suite le point p.

Supposons que le plan ϖ soit à l'infini. Le plan χ est alors un plan diamétral et l'on conclut immédiatement du théorème précédent que *tout plan diamétral est parallèle à la direction axiale.*

11. *Le pôle q d'un plan χ, contenant un certain point p, est situé dans le plan polaire ϖ du point p.*

En effet, le plan χ, renfermant par définition le point q et par hypothèse le point p, contient la droite pq. Cette droite appartient par suite au complexe linéaire et, puisqu'elle passe par p, elle est dans le plan polaire ϖ de ce point. Le plan ϖ, contenant cette droite, contient par conséquent le point q.

On conclut immédiatement de ce théorème que *tout plan parallèle à la direction axiale du complexe* a son pôle à l'infini et, par conséquent, *est un plan diamétral de ce complexe.*

12. *Les plans passant par une même droite* D *ont leurs pôles respectifs sur une même droite* D'.

Le pôle d'un plan variable passant par D engendre un certain lieu géométrique D'. Soient a le point d'intersection de D avec un plan arbitraire ϖ et a' l'un des points d'intersection de D' avec le même plan. La droite aa' est une droite du complexe, puisque, considérée comme située dans le plan a'D, elle passe par le pôle a' de ce plan. Mais cette droite doit aussi passer par le pôle p du plan ϖ. Elle est, en conséquence, unique et bien déterminée. Le lieu D n'est, par suite, ren-

contré qu'en un seul point a' par un plan arbitraire ϖ. Donc c'est une droite.

13. Supposons, en particulier, que la droite D soit à l'infini. Du théorème qui vient d'être démontré on conclut alors que *le lieu des pôles d'une série de plans parallèles est une droite.* Une pareille droite porte le nom de *diamètre* du complexe et du système focal correspondant.

Toute série de plans parallèles comprend le plan de l'infini. Donc *tous les diamètres du complexe* passent par le pôle du plan de l'infini, c'est-à-dire *sont parallèles à la direction axiale de ce complexe.*

Considérons une série de plans parallèles qui soient perpendiculaires à cette direction axiale. Le diamètre de ces plans leur est perpendiculaire. On l'appelle l'*axe* du complexe et du système focal correspondant.

14. *Les plans polaires des divers points d'une même droite* D *passent par une même droite* D'.

Soient α et β les plans polaires respectifs de deux points quelconques a et b de D et soit D' la droite d'intersection de ces plans. Les pôles des divers plans passant par D' sont sur une même droite (n° 12). D'ailleurs cette droite devant contenir les points a et b, pôles respectifs de α et de β, coïncide nécessairement avec D. Les plans passant par D' sont donc bien les plans polaires des divers points de D.

Il y a réciprocité entre les droites D et D', en vertu de la double propriété qui vient d'être établie et qui consiste en ce que les plans polaires des divers points de chacune d'elles passent par l'autre et les pôles des plans passant par chacune d'elles sont sur l'autre. Pour ce motif, les droites D et D' sont appelées *droites conjuguées.*

15. *Toute droite du complexe coïncide avec sa conjuguée;* car un plan quelconque passant par une telle droite a son pôle sur cette droite.

Réciproquement, *toute droite qui coïncide avec sa conjuguée fait partie du complexe.* En effet, soit L une pareille

droite. Tout plan ϖ passant par L a, par hypothèse, son pôle p sur cette droite et les droites qui passent par p dans le plan ϖ étant des droites du complexe, il en est ainsi en particulier de L.

16. *Deux droites conjuguées ne se rencontrent pas.* En effet, si deux pareilles droites D et D′ se coupaient en un point i, le plan polaire ϖ d'un point quelconque p de D, passant par D′ (n° 14), contiendrait i et, contenant i et p, contiendrait D, c'est-à-dire coïnciderait avec le plan des droites D et D′. Un plan quelconque passant par D′ n'aurait donc pas son pôle sur D, ce qui est contraire à l'une des deux propriétés caractéristiques des droites conjuguées (n° 12).

17. *Toute droite du complexe qui rencontre une droite* D *rencontre en même temps sa conjuguée* D′.

Soit L une droite du complexe rencontrant la droite D. Le plan ϖ de ces deux droites a son pôle p sur D′ (n° 12). Par suite, la droite L du plan ϖ, devant passer par le pôle p de ce plan, rencontrera D′.

Supposons que la droite D coïncide avec l'axe du complexe. Il résulte immédiatement du théorème qui vient d'être démontré que *toute droite du complexe qui rencontre l'axe de ce complexe lui est perpendiculaire.*

18. *Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées* D *et* D′ *fait partie du complexe.*

En effet, le plan ϖ, qui passe par une telle droite L et par la droite D, a pour pôle p le point d'intersection de ϖ, c'est-à-dire de L avec D′ (n° 12). Par suite, la droite L, étant située dans le plan ϖ et passant par le pôle p de ce plan, fait partie du complexe.

Une droite rencontrant à angle droit l'axe du complexe rencontre la droite conjuguée de cet axe, qui est à l'infini dans un plan perpendiculaire à la direction axiale. Donc, en vertu du théorème précédent, *toute droite qui rencontre orthogonalement l'axe du complexe appartient au complexe.*

19. *Tout plan parallèle à deux droites conjuguées est un plan diamétral.*

La droite qui unit les points à l'infini des deux droites conjuguées D et D′ appartient au complexe (n° 18); elle passe, en conséquence, par le pôle du plan de l'infini. Par suite, si nous menons, par un point quelconque, des parallèles à D et à D′, le plan de ces deux droites est parallèle à la direction axiale, c'est-à-dire est un plan diamétral (n° 1).

20. *Tout plan perpendiculaire à l'axe rencontre cet axe et deux droites conjuguées quelconques en trois points d'une même droite.*

En effet, la droite qui joint les traces des deux droites conjuguées sur le plan considéré appartient au complexe (n° 18). D'autre part, cette droite, rencontrant la droite à l'infini dans le plan, rencontre en même temps sa conjuguée (n° 17). Or cette conjuguée est précisément l'axe du complexe.

21. *La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre l'axe à angle droit.*

La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées fait partie du complexe (n° 18). Elle est perpendiculaire aux plans parallèles à la fois à ces deux droites, qui sont des plans diamétraux (n° 19); elle a, par suite, une direction perpendiculaire à la direction axiale; autrement dit, elle rencontre la droite suivant laquelle se coupent à l'infini les plans perpendiculaires à la direction axiale. Elle rencontre donc aussi la conjuguée de cette droite (n° 17), c'est-à-dire l'axe du complexe.

22. *Les divers points d'une droite et leurs plans polaires respectifs se correspondent anharmoniquement.*

En effet, à tout point d'une droite quelconque D correspond comme plan polaire un plan et un seul, passant par cette droite ou par sa conjuguée D′, suivant que la droite considérée appartient ou n'appartient pas au complexe (n°s 14 et 15). Réciproquement, à tout plan passant par D′ ou par D, si cette dernière droite fait partie du complexe, correspond, comme pôle, un point et un seul de D (n°s 12 et 15). Or tel est bien

le double caractère d'une correspondance anharmonique entre points et plans.

23. *Les conjuguées* D' *des droites* D *d'un même plan* ϖ *concourent en un même point* p, *qui est le pôle de ce plan.*

En effet, le plan ϖ contenant chacune des droites D, son pôle p est nécessairement sur chacune des droites D', respectivement conjuguées des droites D (n° 12).

Supposons le plan ϖ à l'infini. Il en est de même du point p. On déduit du théorème précédent, dans ce cas spécial, que *les conjuguées des droites à l'infini sont parallèles à une même direction, la direction axiale, et, par conséquent, sont des diamètres du complexe.*

24. *Les conjuguées* D' *des droites* D *d'une même gerbe de sommet* p *sont dans un même plan* ϖ *qui est le plan polaire de* p.

En effet, chacune des droites D passant par p, sa conjuguée D' est dans le plan polaire ϖ de p (n° 14).

Supposons que le sommet de la gerbe coïncide avec le pôle du plan de l'infini. D'après le théorème précédent, toute droite passant par ce pôle, c'est-à-dire *toute parallèle à la direction axiale, autrement dit, tout diamètre, a sa conjuguée dans le plan de l'infini.*

25. *Les conjuguées* D' *des droites* D *d'un même faisceau forment elles-mêmes un faisceau qui est homographique au premier.*

Les droites D étant dans un même plan ϖ, leurs conjuguées D' passent par un même point p, pôle du plan ϖ (n° 23). D'autre part, les droites D passant par un même point q de ϖ, leurs conjuguées D' sont situées dans un même plan χ, plan polaire de q (n° 24). On voit ainsi que les droites D' forment elles-mêmes un faisceau. D'ailleurs, à chacune des droites D du premier faisceau correspond une droite D' et une seule du second faisceau, et inversement. Donc les deux faisceaux sont homographiques.

26. *Les droites d'un complexe linéaire, qui rencontrent deux mêmes droites non conjuguées par rapport à ce complexe, y déterminent deux séries homographiques de points.*

Soient les deux droites A et B. Deux hypothèses sont à considérer, suivant que ces deux droites sont ou ne sont pas dans un même plan.

Supposons d'abord que les droites A et B ne soient pas dans un même plan. Par tout point a de A passe une droite du complexe et une seule rencontrant B. Le point de rencontre b est à l'intersection de B et du plan polaire de a. De même, par tout point b de B passe une droite du complexe et une seule rencontrant A. Le point de rencontre a est à l'intersection de A et du plan polaire de b. Il y a donc correspondance anharmonique entre les points a et b. Autrement dit, les points tels que a et les points tels que b forment deux séries homographiques.

On peut remarquer que cette démonstration s'applique, sans changement, au cas où l'une des droites A et B appartiendrait au complexe et au cas où elles en feraient partie toutes les deux.

Supposons maintenant que les droites A et B soient dans un même plan. Les droites du complexe, qui les rencontrent toutes deux en des points différents, sont dans ce plan et, par conséquent, forment un faisceau ayant pour sommet le pôle du plan. Or on sait que les intersections de A et de B avec les droites d'un pareil faisceau déterminent deux séries homographiques de points.

Le dernier raisonnement ne serait en défaut que si l'une au moins des droites A et B appartenait au complexe, le sommet du faisceau se trouvant alors sur l'une des droites du faisceau ou à leur intersection. Le théorème, dans ce cas, n'a plus de raison d'être.

II. — Propriétés quadratiques.

27. *Les droites d'un complexe linéaire qui s'appuient sur deux mêmes droites, non conjuguées par rapport à ce com-*

plexe et non situées dans un même plan, forment une surface du second degré.

En effet, les droites du complexe qui s'appuient sur les deux droites considérées s'appuient également sur leurs conjuguées respectives (n° 17). Elles engendrent donc une surface gauche du second degré ([1]).

Comme cas particulier du théorème qui vient d'être démontré, on a celui-ci : *les droites d'un complexe linéaire, qui s'appuient sur une même droite et sont parallèles à un même plan non parallèle à cette droite, forment un paraboloïde hyperbolique.*

28. *Deux couples quelconques de droites conjuguées, par rapport à un même complexe linéaire, appartiennent à une même surface du second degré.*

Soient A et A′ un premier couple, B et B′ un second couple de droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire. Par les droites A, A′ et B passe une surface du second degré σ et une seule, que l'on peut considérer comme engendrée par une droite mobile L s'appuyant sur A, A′ et B. Cette droite L, rencontrant A et A′, fait partie du complexe (n° 18) et, rencontrant B, elle rencontre également sa conjuguée B′ (n° 17). Les droites A, A′, B, B′ se trouvent donc toutes quatre sur la surface σ.

Dans le raisonnement qui précède, nous avons supposé que les droites B et B′ ne rencontraient ni A, ni A′. Si A et B, par exemple, se rencontraient et, par suite, étaient dans un même plan, il en serait de même de leurs conjuguées A′ et B′ (n° 23). La surface σ, qui contient les quatre droites, se réduirait alors à un couple de plans.

29. *Dans un système focal, les divers points d'une conique*

([1]) On peut aussi conclure ce théorème du précédent (n° 26), en s'appuyant sur un théorème de Chasles, d'après lequel *une droite mobile qui s'appuie sur deux droites fixes, non situées dans un même plan, en y déterminant deux séries homographiques de points, engendre une surface du second degré.*

ont pour plans polaires respectifs les plans tangents d'un cône du second degré, dont le sommet est le pôle du plan de la conique.

Plus généralement, *les divers points d'une courbe plane algébrique du* $m^{\text{ième}}$ *degré ont pour plans polaires respectifs les plans tangents d'un cône de* $m^{\text{ième}}$ *classe, dont le sommet est le pôle du plan de la courbe.*

Soit C_m une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré, contenue dans le plan ϖ. Les plans polaires des divers points de ϖ passent par le pôle p de ce plan (n° 10). En particulier, les plans polaires des points de C_m enveloppent un cône, ayant p pour sommet. On peut mener à ce cône autant de plans tangents par une droite quelconque D passant par son sommet, qu'il y a de points à l'intersection de la conjuguée D′ de D avec C_m (n° 12). Le nombre de ces plans tangents est donc égal à m et le cône est bien de la $m^{\text{ième}}$ classe ([1]).

Nous dirons qu'une pareille courbe et un pareil cône sont *corrélatifs*.

30. *Dans un système focal, les plans polaires respectifs de deux points conjugués par rapport à une conique sont conjugués par rapport au cône corrélatif.*

Soient, en effet, a et a' deux points conjugués par rapport à une conique C, c'est-à-dire conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection b et b' de la droite aa' avec C. Aux quatre points a, a', b et b' correspondent anharmoniquement leurs quatre plans polaires respectifs α, α', β et β', se coupant suivant une même droite, qui est la conjuguée de aa' (n° 22). Par suite, les quatre points a, a', b, b' étant en proportion harmonique, il en est de même des quatre plans α, α', β, β'. D'ailleurs, les plans β et β' sont tangents au cône corrélatif

---

([1]) On démontre d'une manière analogue que, *dans un système focal : 1° les divers points d'une courbe gauche algébrique du* $m^{\text{ième}}$ *degré ont pour plans polaires les plans tangents d'une développable algébrique de la* $m^{\text{ième}}$ *classe; 2° les divers points d'une surface algébrique du* $m^{\text{ième}}$ *degré ont pour plans polaires les plans tangents d'une surface algébrique de la* $m^{\text{ième}}$ *classe.*

de la conique C. Donc les plans α et α' sont conjugués par rapport à ce cône.

31. *Dans un système focal, les droites respectivement conjuguées de deux droites conjuguées par rapport à une conique quelconque sont deux diamètres conjugués du cône corrélatif.*

En effet, soient D et D′ deux droites contenues dans le plan ϖ d'une conique C et conjuguées par rapport à cette conique, c'est-à-dire conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes T et T′, menées à C par le point de rencontre o de D et de D′. Les droites Δ, Δ', Θ, Θ' respectivement conjuguées de D, D′, T, T′, forment, comme elles, un faisceau qui est contenu dans le plan polaire ω du point o et qui a pour sommet le sommet p du cône Γ corrélatif de la conique C. De plus, le rapport anharmonique des quatre droites Δ, Δ', Θ, Θ' est égal à celui des quatre droites D, D′, T, T′ (nº 25), et comme les quatre premières droites sont en proportion harmonique, il en est de même des quatre dernières. Or les droites Θ et Θ' sont à l'intersection du cône Γ avec le plan ω. Les droites Δ et Δ', conjuguées harmoniques par rapport à Θ et à Θ', sont donc bien deux diamètres conjugués du cône Γ.

32. *Dans un système focal, les divers points d'un cercle ayant son centre sur l'axe et son plan perpendiculaire à cet axe, ont pour plans polaires respectifs les plans tangents d'un cône de révolution, dont l'axe coïncide avec celui du système focal.*

Soit O un cercle, dont le centre o est sur l'axe du système focal et dont le plan ω est perpendiculaire à cet axe. Les plans polaires des points du cercle O enveloppent un cône du second degré Ω (nº 29) ayant o pour sommet. La droite à l'infini dans ω a pour conjuguée l'axe U du système focal (nº 13). Mais le point o étant conjugué, par rapport au cercle O, de tout point à l'infini dans ω, le plan ω est conjugué, par rapport au cône Ω, de tout plan passant par U (nº 30). La droite U est donc, par rapport au cône Ω, le diamètre conjugué du plan ω et, comme ce diamètre est perpendiculaire à ω, c'est l'axe

du cône. D'autre part, deux diamètres rectangulaires du cercle O, étant leurs propres conjuguées dans le système focal (n° 15), sont deux diamètres conjugués du cône Ω (n° 31). Deux diamètres conjugués quelconques du cône Ω dans le plan ω étant rectangulaires, ce cône est de révolution.

33. Il résulte du théorème précédent que, si un point du système focal tourne autour de l'axe U, il en est de même de son plan polaire, puisque ce plan enveloppe alors un cône de révolution ayant U pour axe. Par suite, *un système focal et le complexe linéaire qui lui correspond ne cessent de coïncider avec eux-mêmes, dans toute rotation autour de leur axe* U.

34. Considérons l'ensemble des plans diamétraux et des droites du complexe qui s'y trouvent réparties. Il est clair que, dans toute translation parallèle à la direction axiale du complexe, les plans diamétraux glissent sur eux-mêmes et que le faisceau de droites parallèles du complexe, contenu dans chacun d'eux, reste en coïncidence avec lui-même. Donc *un complexe linéaire et le système focal correspondant restent en coïncidence avec eux-mêmes, dans toute translation parallèle à leur direction axiale.*

35. Du rapprochement des deux dernières propositions, on conclut que *tout système focal et le complexe linéaire qui lui correspond coïncident avec eux-mêmes, dans toute rotation autour de leur axe, accompagnée d'une translation le long de cet axe, et aussi, par conséquent, dans tout déplacement hélicoïdal autour de ce même axe.*

III. — Relations métriques. Génération du complexe linéaire.

36. Dans un système focal, il existe une relation de position remarquable entre un point quelconque, son plan polaire et l'axe du système. Cette relation est la suivante :

La distance d'un point quelconque à l'axe est inversement

proportionnelle à la tangente de l'angle que fait avec cet axe le plan polaire du point.

En d'autres termes, en désignant par r la distance d'un point quelconque p à l'axe U et par θ l'angle que fait avec U le plan polaire correspondant ϖ, on a

$$r \tang \theta = c,$$

c désignant une constante.

Pour établir cette relation, menons de p une perpendiculaire L à U. Soit o le pied de cette perpendiculaire. La droite L fait partie du complexe (n° 18) et les plans polaires de ses divers points forment, en pivotant autour de L, un faisceau homographique à cette série de points (n° 22). On a, en conséquence, entre la distance r d'un quelconque de ces points à U et l'angle θ du plan polaire correspondant avec le plan passant par L et U, c'est-à-dire avec U, une relation de la forme

$$r \tang \theta + ar + b \tang \theta = c.$$

Mais le plan polaire du point à l'infini sur L passe par U. Par suite, pour $r = \infty$, la relation précédente doit donner $\tang \theta = 0$. On en conclut $a = 0$.

D'autre part, le plan polaire de o est perpendiculaire à U; ce qui exige que l'on ait $\tang \theta = \infty$, pour $r = 0$. On en conclut $b = 0$. La relation se réduit donc bien à

$$r \tang \theta = c.$$

37. Dans un système focal, les positions relatives de l'axe et de deux droites conjuguées quelconques sont fixées d'une manière très simple par le théorème suivant :

Dans un système focal, les distances de deux droites conjuguées à l'axe sont proportionnelles aux tangentes des angles aigus que font respectivement les deux droites avec cet axe.

Soient, en effet, D et D′ deux droites conjuguées, r et r' leurs distances respectives à l'axe U, φ et φ' les angles que D et D′ font respectivement avec cet axe. La perpendiculaire

commune I à D et à D′ appartient au complexe (n° 18) et rencontre orthogonalement l'axe U (n° 21). Le plan polaire du point commun à D et à I passe par I et par D′. Il fait, par suite, avec U l'angle φ'. De même, le plan polaire du point commun à D′ et à I passe par I et par D. Il fait, par suite, avec U l'angle φ. On a donc, en appliquant une relation déjà établie (n° 36),

$$r \operatorname{tang} \varphi' = r' \operatorname{tang} \varphi;$$

d'où

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi'}.$$

38. La répartition des droites du complexe autour de l'axe U est régie par une loi remarquablement simple, que l'on peut énoncer ainsi :

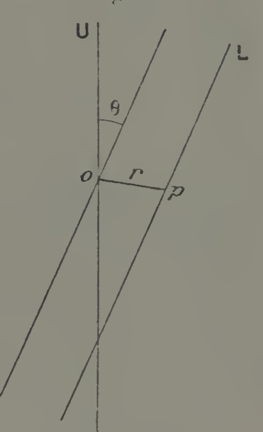


Fig. 2.

La plus courte distance d'une droite quelconque d'un complexe linéaire à l'axe de ce complexe est inversement proportionnelle à la tangente de l'angle aigu formé par ces deux droites ([1]).

Soit *op* la perpendiculaire commune à l'axe U et à une droite quelconque L du complexe (*fig.* 2). Désignons par r la plus courte distance *op* de ces deux droites et par θ l'angle aigu formé par leurs directions respectives. La droite L, par hypothèse, et la droite *op*, par construction (n° 18), sont deux droites du complexe et, comme elles passent toutes deux par le point p, leur plan est le plan polaire de p. L'angle θ est égal à l'angle de ce plan avec U. Comme d'ailleurs r est la distance du point p à U, on a, d'après un théorème précédent (n° 36),

$$r \operatorname{tang} \theta = c. \tag{1}$$

39. La relation (1) montre qu'un complexe linéaire est complètement déterminé par son axe et son paramètre c. Il

([1]) Cette relation est en quelque sorte l'équation, réduite à sa forme la plus simple, d'un complexe linéaire. Nous en déduisons plus loin, dans une Note spéciale, l'équation générale d'un pareil complexe.

y a, toutefois, deux complexes satisfaisant à ces conditions : ils diffèrent par le sens dans lequel est compté l'angle θ. Ces deux complexes sont néanmoins superposables. D'une manière générale, deux complexes linéaires sont égaux, c'est-à-dire superposables, lorsqu'ils ont le même paramètre c. Cette condition est nécessaire et suffisante.

Un complexe linéaire est défini complètement et sans ambiguïté, lorsque l'on connaît son axe et l'une quelconque des droites qui le composent. En effet, r_0 étant la plus courte distance de ces deux droites et θ_0 l'angle aigu formé par leurs directions respectives, la valeur du paramètre c est déterminée par la relation $c = r_0 \operatorname{tang} \theta_0$.

40. Sur les cylindres de révolution, ayant pour axe l'axe d'un complexe linéaire, considérons l'ensemble des hélices décrites dans le même sens et ayant pour pas commun

$$h = 2\pi c, \tag{2}$$

c étant le paramètre de ce complexe. L'angle aigu θ que fait la binormale à une pareille hélice tracée sur un cylindre de rayon r avec l'axe de ce cylindre est, comme on le sait, donné par la relation

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{h}{2\pi r}.$$

On en déduit, eu égard à la condition (2),

$$r \operatorname{tang} \theta = c.$$

C'est la relation (1). Donc :

Les droites d'un complexe linéaire ne sont autres que les binormales à des hélices d'égal pas, tracées, dans un même sens, sur les divers cylindres de révolution ayant pour axe commun l'axe du complexe.

Nous appellerons ces hélices les *hélices normales du complexe linéaire.*

41. Le plan normal à une pareille hélice, en l'un quelconque de ses points, contient la binormale à cette courbe en ce point et la perpendiculaire menée de ce point à l'axe du complexe. Cette dernière droite appartenant au complexe

(n° 18) ainsi que la binormale (n° 40), le plan normal est le plan polaire du point correspondant. Ainsi :

Par rapport à un complexe linéaire, le plan polaire d'un point quelconque de l'espace est le plan normal de l'hélice normale qui passe par ce point ([1]).

Les deux dernières propositions auxquelles nous venons de parvenir (nos 40 et 41) fournissent l'image la plus nette que l'on puisse concevoir d'un complexe linéaire.

IV. — Complexe linéaire spécial.

42. Le cas où le paramètre c est nul mérite de fixer l'attention. De la relation (1) on conclut alors soit $r=0$, soit $\tang\theta=0$, c'est-à-dire θ nul ou égal à $180°$. Par suite, le complexe est formé des droites qui rencontrent l'axe U ou lui sont parallèles. Un pareil complexe linéaire est appelé *complexe linéaire spécial*. Tous les points de l'axe U sont des *points singuliers* du complexe; car toutes les droites passant par un tel point appartiennent au complexe. De même, tous les plans passant par U sont des *plans singuliers* du complexe; car toutes les droites contenues dans un tel plan font partie du complexe.

Nous allons démontrer qu'un complexe linéaire ne peut admettre de point singulier ou de plan singulier, à moins d'être un complexe linéaire spécial.

43. Soit s un point singulier d'un complexe linéaire. Considérons une droite arbitraire D, qui ne passe par aucun point singulier et ne soit contenue dans aucun plan singulier du complexe. Les droites issues de s et situées dans le plan sD font, par hypothèse, partie du complexe. Par suite, la conjuguée D′ de D passe par le point s, pôle du plan sD

([1]) De cette proposition et de deux théorèmes démontrés plus haut (nos 10 et 11) on conclut facilement que : 1° *Les plans osculateurs d'une hélice, aux divers points de rencontre de cette courbe avec un plan quelconque, se coupent en un même point de ce plan.*

2° *Les points de contact d'une hélice avec les plans osculateurs qu'on peut lui mener par un point quelconque sont dans un même plan passant par ce point.*

Il suffit, pour le voir, de considérer les hélices orthogonales de celles qui viennent de nous servir à définir le complexe linéaire.

(n° 12). Cela posé, imaginons que la droite D se déplace dans un plan ϖ, ne renfermant pas le point s. La conjuguée D' de D ne cesse alors de passer par le pôle p du plan ϖ (n° 12) et, comme elle passe d'ailleurs par s, elle reste fixe.

Nous allons maintenant démontrer qu'une droite quelconque L du complexe rencontre D'. Nous pouvons supposer que la trace l de L sur le plan ϖ ne coïncide pas avec p; car, pour ce cas particulier, il n'y a pas de démonstration à faire. Par l faisons passer une droite D dans le plan ϖ. La conjuguée de D étant la droite fixe D', le pôle du plan des droites D et L est sur D' et la droite L, devant passer par ce pôle, rencontre D'. Toutes les droites du complexe rencontrent donc la droite fixe D' et le complexe est un complexe spécial. Ainsi :

Un complexe linéaire ne peut admettre aucun point singulier, à moins d'être un complexe spécial.

44. Imaginons que, dans un complexe linéaire, il y ait trois droites concourantes oa, ob, oc. Il est facile d'en conclure que toute droite ol passant par o appartient au complexe, que, par suite, le point o est un point singulier et le complexe un complexe spécial (n° 43). En effet, la trace oh du plan aol sur le plan boc fait partie du complexe, puisque cette droite du plan boc contient le pôle o de ce plan. De même ol, passant par le point d'intersection des droites oa et oh du complexe et étant située dans le plan de ces deux droites, appartient au complexe. Donc, *trois droites particulières d'un complexe linéaire ne peuvent passer par un même point, sans être dans un même plan, à moins que le complexe ne soit un complexe linéaire spécial.*

45. Considérons un complexe linéaire admettant un plan singulier σ. Prenons une droite D, qui ne passe par aucun point singulier et qui ne soit contenue dans aucun plan singulier du complexe. Les droites du plan σ, qui passent par la trace d de D sur ce plan, sont supposées faire partie du complexe. Par suite, d est pôle de σ et la conjuguée D' de D est dans ce plan (n° 14).

Imaginons que la droite D pivote autour d'un point p extérieur à σ. La conjuguée D' de D reste constamment dans le

plan polaire ϖ de p, et, comme elle est d'autre part dans le plan σ, elle est à l'intersection de ces deux plans.

Démontrons maintenant qu'une droite quelconque L du complexe rencontre D'. Nous pouvons supposer que cette droite n'est pas dans le plan ϖ, car, s'il en était ainsi, elle rencontrerait nécessairement D' qui est dans ce plan. Par le point p et dans le plan pL, menons une droite quelconque D. Cette droite ayant pour conjuguée D', le plan polaire du point d'intersection des droites D et L passe par D' (n° 14) et L, étant contenue dans ce plan, rencontre nécessairement D'. Toute droite L du complexe rencontrant D', le complexe est un complexe spécial. Ainsi :

Un complexe linéaire ne peut admettre un plan singulier à moins d'être un complexe spécial.

46. On conclut immédiatement de ce théorème que *trois droites particulières d'un complexe linéaire ne peuvent être dans un même plan, sans passer par un même point, à moins que le complexe ne soit un complexe linéaire spécial.*

Imaginons un complexe linéaire possédant trois droites A, B, C, situées dans un même plan ϖ et non concourantes. Soit L une droite quelconque de ce plan. La droite H qui joint le point de rencontre de B et de C au point de rencontre de A et L fait partie du complexe, puisqu'elle passe par l'intersection de B et de C et qu'elle est dans le plan de ces deux droites. De même, la droite L, passant par l'intersection des droites A et H du complexe et située dans le plan de ces deux droites, fait nécessairement partie du complexe. Le plan ϖ est donc un plan singulier et le complexe un complexe linéaire spécial.

V. — Construction d'un complexe linéaire contenant une droite donnée et admettant pour droites conjuguées deux autres droites données.

47. Proposons-nous de *construire les diverses droites d'un complexe linéaire, connaissant une de ces droites et un couple de droites conjuguées par rapport à ce complexe.*

Nous résoudrons cette question de deux manières différentes, en cherchant successivement les droites du complexe qui passent par un point pris arbitrairement et les droites du complexe situées dans un plan également arbitraire.

Supposons données la droite L d'un complexe linéaire et les droites D et D′ conjuguées par rapport à ce complexe [1].

Soit p un point quelconque, n'appartenant à aucune des droites D, D′ et L. La droite A, menée par p et rencontrant à la fois D et D′, est évidemment une des droites cherchées (nº 18). Par p et la droite L faisons passer un plan. La droite B, joignant les traces de D et de D′ sur ce plan, appartient au complexe (nº 18) et son point d'intersection q avec L est le pôle du plan pL. La droite pq est, par suite, une seconde droite du complexe. Les autres droites du complexe qui passent par p sont situées dans le plan déterminé par les droites pq et A.

Nous avons supposé que le point p n'appartenait ni à la droite D, ni à la droite D′. Si le point p était sur une de ces droites, sur D par exemple, les droites du complexe, passant par ce point, seraient contenues dans le plan pD′.

Si le point p était pris sur la droite L, les droites du complexe qui passent par ce point seraient contenues dans le plan déterminé par L et par la droite issue de p, qui s'appuie à la fois sur D et sur D′.

48. Résolvons le même problème, en cherchant les droites du complexe linéaire contenues dans un plan ϖ qui ne passe par aucune des droites D, D′ et L. On obtient immédiatement une de ces droites A, en joignant les traces de D et de D′ sur le plan ϖ (nº 18). Soit q le point de rencontre de L et de ϖ. Menons par q une droite B s'appuyant à la fois sur D et sur D′. La droite B appartient au complexe (nº 18) et détermine avec L le plan polaire du point q. La droite d'intersection de ce plan avec ϖ fait également partie du complexe

[1] La droite L n'est supposée rencontrer ni D, ni D′. Le problème serait impossible, si L ne rencontrait qu'une de ces droites. Il serait indéterminé, si L les rencontrait l'une et l'autre.

et coupe A en un point p, qui est le pôle du plan ϖ. Les diverses droites passant par p et contenues dans ϖ appartiennent au complexe.

Nous avons supposé que le plan ϖ ne passait ni par la droite D, ni par la droite D′. Si, au contraire, le plan ϖ passait par D, les droites du complexe situées dans ce plan seraient celles qui passeraient par le point d'intersection de ϖ et de D′.

Si le plan ϖ contenait la droite L, les droites du complexe situées dans ce plan passeraient par le point de rencontre de L et de la droite joignant les traces de D et de D′ sur le plan ϖ.

49. On peut se proposer encore de *construire l'axe d'un complexe linéaire, contenant une droite donnée* L *et admettant un couple de droites conjuguées également données* D *et* D′.

L'axe U du complexe est, comme on le sait (n° 10), parallèle à l'intersection de deux de ses plans diamétraux. On a un premier plan diamétral α, en prenant un plan quelconque parallèle à la fois à D et à D′ (n° 19). On obtient aisément le plan diamétral β, qui contient la droite L : il doit passer par la droite K, parallèle à L, qui s'appuie à la fois sur D et sur D′ (n° 18), et cette condition achève de le déterminer. L'axe cherché U doit donc être parallèle à l'intersection des plans α et β. D'ailleurs, il doit rencontrer les diverses droites du complexe dont la direction est perpendiculaire à la sienne et qui s'appuient sur D et D′ (n° 17). On construit deux de ces droites G et H et l'on obtient l'axe U, en traçant une droite qui soit parallèle à l'intersection des plans α et β et qui s'appuie sur les droites G et H.

Connaissant l'axe U et l'une des droites L du complexe, on en conclut le paramètre de ce complexe, comme on l'a vu précédemment (n° 39).

CHAPITRE II.

CONGRUENCES LINÉAIRES. — FAISCEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES.

I. — Génération des congruences linéaires.

50. Parmi les assemblages de droites que l'on désigne sous le nom de *congruences* (n° 3), le plus simple que l'on ait à considérer est la congruence dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à l'unité. Une pareille congruence, que nous appellerons *congruence linéaire*, est par conséquent telle que, parmi les droites qui la composent, il n'y en a qu'une passant par un point quelconque et une seule également située dans un plan quelconque.

En partant de cette définition, nous allons démontrer très simplement que *les droites d'une congruence linéaire rencontrent deux mêmes droites, non situées dans un même plan* (1).

51. Nous ferons usage d'une remarque qui s'applique utilement dans d'autres circonstances semblables, et qui consiste en ce que, *si des surfaces algébriques d'un même degré, en nombre simplement infini, sont telles que, par tout point pris arbitrairement, il en passe une et une seule, ces surfaces forment un faisceau ponctuel* (2).

En effet, ces surfaces sont définies par une même équation, renfermant un paramètre variable et la substitution, dans cette

---

(1) La démonstration exposée ici a déjà fait, de notre part, l'objet d'une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XIX, p. 58-61).

(2) Une remarque analogue s'applique à des courbes algébriques situées dans un même plan.

équation, des coordonnées d'un point arbitraire devant donner lieu à une valeur unique de ce paramètre : celui-ci doit entrer linéairement dans l'équation.

Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes préliminaires sur les congruences linéaires.

52. *Les droites d'une congruence linéaire, qui rencontrent une même droite fixe arbitraire, forment une surface du second degré.*

Par la droite fixe D faisons passer un plan quelconque. Ce plan contient une droite de la congruence et une seule, qui fait partie de la section, par le plan, de la surface engendrée. Cette section est complétée par la droite D, qui est une ligne simple de la surface, puisque par chaque point de D il passe une droite et une seule de la congruence. La surface est donc coupée suivant deux droites par un plan quelconque passant par D : c'est, par conséquent, une surface du second degré.

53. *Les diverses surfaces du second degré, engendrées par les droites d'une congruence linéaire qui s'appuient sur des droites d'un même plan concourant en un même point, contiennent un même quadrilatère gauche.*

Considérons un faisceau de droites D, concourant en un même point p et contenues dans un même plan ϖ. Chaque droite D donne lieu à une surface du second degré σ engendrée par les droites de la congruence qui la rencontrent. Par tout point a, pris arbitrairement, passe une des surfaces σ et une seule. Par ce point, en effet, passe une droite L et une seule de la congruence, à laquelle correspond une des droites D, celle qui joint le point p à la trace de L sur le plan ϖ, et à cette droite D correspond une des surfaces σ, la seule qui passe par le point a. Donc, en vertu d'une remarque faite plus haut (n° 51), les surfaces σ forment un faisceau ponctuel.

D'autre part, toutes ces surfaces σ ont en commun deux droites de la congruence : celle qui passe par le point p et celle qui est contenue dans le plan ϖ, puisque ces deux

droites rencontrent toutes les droites D. L'intersection commune des surfaces σ comprend ainsi deux droites, qui, appartenant à la congruence, ne peuvent être dans un même plan. Par suite, d'après une proposition bien connue, le complément de cette intersection est formé de deux autres droites Δ et Δ', réelles ou imaginaires conjuguées, s'appuyant sur les deux premières, c'est-à-dire formant avec elles un quadrilatère gauche.

54. Il n'y a qu'un mot à ajouter, pour déduire de ce qui précède ce théorème capital :

Les droites d'une congruence linéaire s'appuient sur deux mêmes droites.

En effet, toutes les droites de la congruence, qui servent à engendrer les surfaces σ (n° 53), rencontrent les deux droites Δ et Δ', ces droites Δ et Δ' étant, sur chaque surface σ, des génératrices d'un système autre que celui des génératrices formées par les droites de la congruence. Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les droites de la congruence concourent à engendrer les surfaces σ. Considérons, en effet, une quelconque de ces droites L; elle est rencontrée par une droite D passant par le point p et située dans le plan ϖ, et cette droite D sert à engendrer une surface σ qui contient L. Donc toute droite L de la congruence s'appuie sur les deux droites Δ et Δ'.

Nous donnerons aux droites Δ et Δ' le nom de *directrices* de la congruence linéaire. De la méthode même que nous avons suivie pour les trouver, il résulte qu'elles ne sont pas toujours réelles; elles peuvent être imaginaires conjuguées.

55. Étant données les deux directrices Δ et Δ' d'une congruence linéaire, rien n'est plus simple que de construire la droite de cette congruence qui passe par un point donné ou celle qui est contenue dans un plan donné. Le premier problème se résout, par exemple, en faisant passer deux plans respectivement par les droites Δ, Δ' et par le point : l'intersection de ces deux plans est la droite cherchée.

Pour résoudre le second problème, on prend les traces de

Δ et Δ' sur le plan donné. En joignant ces traces, on a la droite demandée.

Chacune de ces solutions est unique et bien déterminée, à moins que le point donné n'appartienne à une des directrices ou que le plan donné ne passe par une de ces droites. Il est clair, en effet, que par tout point de l'une des directrices, de Δ par exemple, passent une infinité de droites de la congruence : ce sont les droites issues de ce point et rencontrant Δ'.

De même, tout plan qui contient Δ renferme une infinité de droites de la congruence : ce sont les droites qui sont situées dans le plan considéré et passent par le point de rencontre de ce plan avec Δ'. Les points de Δ et de Δ' sont donc des *points singuliers* et les plans passant par Δ ou Δ' des *plans singuliers,* relativement à la congruence linéaire.

II. — Intersection des complexes et congruences linéaires.

56. Il est facile de voir que *les droites communes à deux complexes linéaires forment une congruence linéaire.*

En effet, les droites de chacun des deux complexes linéaires, qui passent par un point quelconque, sont dans un plan contenant ce point. La droite d'intersection des deux plans est la seule droite commune aux deux complexes qui passe par le point. Donc la congruence formée des droites communes aux deux complexes est du premier ordre.

Pareillement, les droites de chacun des deux complexes, situées dans un plan quelconque, passent par un point de ce plan. La droite qui joint les deux points ainsi obtenus est la seule droite commune aux deux complexes qui soit contenue dans le plan. Donc la congruence considérée est de la première classe.

57. La proposition que nous venons d'établir peut s'énoncer sous cette forme : *L'intersection de deux complexes linéaires est une congruence linéaire.*

Ce n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, qui se démontre de la même manière et qui

peut s'énoncer ainsi : *L'intersection complète de deux complexes, dont les ordres respectifs sont m et n, est une congruence d'ordre mn et de classe mn.*

58. Revenons aux deux complexes linéaires. Soient Δ et Δ' les directrices de la congruence linéaire formant leur intersection. Les droites qui joignent un point quelconque de l'une des directrices Δ aux divers points de l'autre Δ' appartiennent à la congruence linéaire et, par suite, à chacun des deux complexes. Les directrices Δ et Δ' forment donc un couple de droites conjuguées par rapport à chacun de ceux-ci. On peut donc dire que *deux complexes linéaires quelconques ont en commun un couple de droites conjuguées, d'ailleurs réelles ou imaginaires conjuguées.*

59. Relativement à l'intersection de trois complexes linéaires ou d'une congruence et d'un complexe linéaires, on a le théorème suivant :

Les droites communes à trois complexes linéaires, ou à un complexe et à une congruence linéaires, forment une surface gauche du second degré.

Le premier cas du théorème se ramène immédiatement au second, puisque les droites communes à deux des trois complexes linéaires appartiennent à une congruence linéaire (n° 56). Or, les droites communes à un complexe et à une congruence linéaire sont les droites de ce complexe qui rencontrent les deux directrices de la congruence et ces droites forment une surface du second degré (n° 27).

La démonstration précédente semble en défaut lorsque les directrices de la congruence sont imaginaires; mais le principe de continuité permet d'étendre immédiatement le théorème à ce cas spécial.

60. Nous allons compléter ce qui concerne ces questions d'intersections, en démontrant deux autres propositions et d'abord celle-ci :

Quatre complexes linéaires ou deux complexes et une con-

gruence linéaire, ou encore deux congruences linéaires, ont en commun deux droites, réelles ou imaginaires conjuguées.

Les deux premiers cas se ramènent immédiatement au troisième, en observant que les droites communes à deux complexes linéaires forment une congruence linéaire (n° 56).

Deux congruences linéaires ont d'ailleurs deux droites communes, parce qu'il existe, comme on le sait, deux droites réelles ou imaginaires conjuguées, qui rencontrent les quatre droites, formant par couples les directrices des deux congruences [1].

61. *Un complexe linéaire et un des systèmes de génératrices rectilignes d'une surface réglée du second degré ont en commun deux droites réelles ou imaginaires conjuguées.*

En effet, soient A, B, C trois droites de la surface du second degré, ne faisant pas partie du système de génératrices rectilignes dont il est question dans l'énoncé précédent. L'ensemble des droites du complexe considéré, qui rencontrent la droite C, en rencontrent une autre D, conjuguée de C (n° 17). Les droites qu'il s'agit de déterminer, appartenant au système de génératrices rectilignes de la surface du second degré dont A, B et C ne font pas partie, doivent rencontrer A, B et C, et, appartenant au complexe, elles doivent s'appuyer sur D, puisqu'elles s'appuient sur C. Or il existe, comme on le sait, deux droites, réelles ou imaginaires conjuguées, qui remplissent ces conditions.

III. — Faisceaux de complexes linéaires. Conoïde de Plücker.

62. Considérons quatre droites projectivement indépendantes H, K, L, M, c'est-à-dire telles qu'elles n'appartiennent pas à une même surface du second degré et que deux quel-

---

[1] Nous appliquons encore ici le principe de continuité, dans l'hypothèse où les directrices de l'une au moins des congruences seraient imaginaires.

conques d'entre elles ne soient pas dans un même plan. Il existe alors un couple unique de droites Δ et Δ', réelles ou imaginaires conjuguées, qui rencontrent les quatre droites H, K, L, M. Si les droites Δ et Δ' sont réelles, on peut les prendre pour directrices d'une congruence linéaire, dont font partie les droites H, K. L, M. C'est, comme on le voit, la seule congruence linéaire qui contienne ces quatre droites. Donc, *quatre droites, projectivement indépendantes, déterminent une congruence linéaire et n'en déterminent qu'une.*

Le raisonnement qui nous a conduit à ce théorème implique, il est vrai, la réalité des droites Δ et Δ'; mais le principe de continuité permet d'étendre immédiatement la conclusion au cas où Δ et Δ' sont imaginaires.

63. Les quatre droites H, K, L, M déterminent une infinité simple de complexes linéaires, admettant comme droites conjuguées les deux droites qui s'appuient sur H, K, L et M. On achève de déterminer l'un quelconque de ces complexes, en l'assujettissant à renfermer une cinquième droite prise arbitrairement (n° 47). On voit ainsi que *quatre droites projectivement indépendantes déterminent une infinité simple de complexes linéaires, ayant en commun une congruence linéaire.*

Les complexes linéaires qui contiennent ainsi quatre mêmes droites sont dits former un *faisceau*. Parmi eux, se trouvent deux complexes spéciaux, d'ailleurs réels ou imaginaires; chacun d'eux est formé de l'ensemble des droites qui s'appuient sur l'une des droites Δ et Δ'.

64. Cherchons le *lieu des axes des complexes linéaires formant un faisceau*, c'est-à-dire contenant une même congruence linéaire. Soit Ω la perpendiculaire commune aux deux directrices Δ et Δ' de la congruence, supposées réelles. Les droites Δ et Δ' étant conjuguées par rapport à chacun des complexes du faisceau (n° 58), la perpendiculaire commune Ω à Δ et à Δ' rencontre à angle droit l'axe de ce complexe (n° 21). Le lieu cherché est donc engendré par une droite s'appuyant constamment sur la droite Ω, en restant parallèle à un plan ω perpendiculaire à Ω : c'est un conoïde droit. On

lui a donné le nom de *conoïde de Plücker,* qui le premier s'est occupé de cette surface ([1]).

65. Occupons-nous de définir plus complètement le mouvement de la droite qui engendre le conoïde. Considérons, à cet effet, l'axe U de l'un des complexes linéaires du faisceau. Les droites de la congruence linéaire qui rencontrent cet axe lui sont perpendiculaires (n° 17). Si donc on prend une droite G s'appuyant à la fois sur Δ et sur Δ', la perpendiculaire commune à Ω et à G sera l'axe U de l'un des complexes linéaires, c'est-à-dire une des génératrices du conoïde de Plücker.

Il est d'ailleurs manifeste que cette construction, appliquée aux diverses droites G de la congruence, fournira la série complète des axes des complexes linéaires renfermant cette congruence. En effet, on achève de déterminer un de ces complexes en l'assujettissant à contenir une droite quelconque L, ne rencontrant ni Δ, ni Δ' (n° 47). Or la construction de l'axe U du complexe, contenant la droite L et admettant Δ et Δ' comme droites conjuguées, est un problème dont la solution a été donnée plus haut (n° 49) et que l'on ramène à construire une perpendiculaire commune à Ω et à une droite G s'appuyant sur Δ et Δ'.

66. Un même axe U rencontre une infinité de droites de la congruence toutes parallèles à un même plan perpendiculaire à U. Par conséquent, pour déterminer la série complète de ces axes et engendrer le conoïde de Plücker, qui en est le lieu géométrique, il suffit d'appliquer la construction qui a été indiquée (n° 65) aux seules droites de la congruence issues d'un même point, d'ailleurs quelconque, de Δ ou de Δ'.

67. Il est facile de voir que *les droites Δ et Δ' sont des génératrices du conoïde*. En effet, par un point quelconque *a* de Δ, on peut mener une droite A perpendiculaire à Δ et s'appuyant sur Δ'. La droite Δ, étant la perpendiculaire com-

---

([1]) Quelques auteurs l'appellent *cylindroïde*.

mune à Ω et à Λ, appartient au conoïde. C'est d'ailleurs une droite simple de cette surface, puisque par a il ne passe qu'une droite perpendiculaire à Δ et rencontrant Δ'.

La même démonstration, appliquée à Δ', montre que cette droite est également une droite simple du conoïde.

68. Proposons-nous de déterminer le degré du conoïde de Plücker. Pour cela, cherchons le nombre des points d'intersection de cette surface avec une droite G s'appuyant sur Δ et sur Δ'. Le point où la perpendiculaire commune à Ω et à G rencontre G est le seul point où cette droite coupe le conoïde, en dehors de ceux qui sont sur Δ et Δ'. D'ailleurs, puisque Δ et Δ' sont des droites simples de la surface (nº 67), les points où G s'appuie sur Δ et Δ' sont des points simples de l'intersection. *Le conoïde de Plücker*, étant coupé en trois points par la droite G, *est du troisième degré.*

69. On voit aisément que *la droite Ω est une ligne double du conoïde.* En effet, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer (nº 66), on construit complètement le conoïde de Plücker, en menant des perpendiculaires communes à Ω et aux droites qui unissent un point fixe quelconque a de Δ aux différents points de Δ'. Les pieds des perpendiculaires à ces droites, menées par un point i quelconque de Ω, engendrent une circonférence dans le plan $a\Delta'$, et ces perpendiculaires engendrent elles-mêmes un cône du second degré ayant i pour sommet. Les génératrices d'intersection de ce cône avec un plan perpendiculaire en i à Ω sont les génératrices du conoïde qui passent en i, et elles sont bien au nombre de deux, comme il s'agissait de le démontrer pour établir que la droite Ω est une ligne double ([1]).

([1]) On trouvera, dans le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim (2e édition, p. 435-439), avec une étude plus complète du conoïde de Plücker, l'indication bibliographique des principaux travaux auxquels cette surface a donné lieu.

IV. — Construction d'un complexe linéaire contenant cinq droites données.

70. Nous allons résoudre le problème suivant :

Étant données cinq droites, dont deux quelconques ne sont pas dans un même plan, et dont quatre quelconques n'appartiennent pas à une même surface du second degré, construire le complexe linéaire qui les contient.

Soient H, K, L, M et N les cinq droites. Imaginons que l'on construise les deux droites D et D′ rencontrant quatre de ces droites : K, L, M et N par exemple. Le problème se trouve alors ramené à un autre que nous avons résolu plus haut (n° 47). Mais il peut arriver qu'aucune des cinq manières d'associer par quatre les cinq droites données ne fournisse un couple de droites conjuguées D et D′ réelles. Voici une autre solution qui s'applique à tous les cas.

71. Cherchons les droites du complexe qui passent par un point p quelconque. Les quatre droites H, K, L et M déterminent une congruence linéaire dont toutes les droites appartiennent au complexe. Pour avoir la droite de cette congruence qui passe par p, construisons deux droites A et A′ s'appuyant à la fois sur H, K et L. Ces droites A et A′ peuvent être considérées comme droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire contenant la droite M et, par suite, la congruence. Une construction linéaire déjà indiquée donne le plan polaire ϖ du point p relativement à ce complexe (n° 47). Construisons pareillement deux droites B et B′, s'appuyant à la fois sur H, K et M, puis le plan polaire ψ de p par rapport au complexe linéaire contenant L et admettant B et B′ pour droites conjuguées. L'intersection px des plans ϖ et ψ est la droite appartenant à la congruence déterminée par H, K, L, M et passant par p. On obtiendra de même la droite py de la congruence déterminée par H, K, L et N. Le plan des deux droites px et py est le plan polaire du point p, relativement au complexe défini par les cinq droites H, K, L,

M et N. Par suite, toutes les droites de ce plan qui passent par p font partie du complexe.

On déterminerait, d'une manière analogue, le pôle d'un plan par rapport à un complexe linéaire dont on connaît cinq droites.

De la construction qui vient d'être exposée, on conclut que : *Étant données cinq droites, projectivement indépendantes, il existe un complexe linéaire contenant ces cinq droites, et il n'en existe qu'un.*

CHAPITRE III.

GÉNÉRALITÉS SUR LES COMPLEXES ET LES CONGRUENCES DE DROITES.

I. — Lignes et surfaces focales d'une congruence.

72. Nous allons tout d'abord donner une démonstration très simple [1] d'un beau théorème dû à Schönemann, auquel M. Mannheim a donné une portée considérable, dans ses importants travaux de Géométrie cinématique. Ce théorème se déduit presque immédiatement des premiers éléments de la théorie des congruences linéaires. Il nous sera d'ailleurs utile dans ce qui va suivre. On peut l'énoncer ainsi :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'un solide invariable, pour une position quelconque de ce solide, s'appuient en général sur deux mêmes droites.

Elles peuvent être, exceptionnellement, concourantes ou parallèles.

Nous allons faire voir, en effet, que ces normales forment une congruence linéaire. La proposition à démontrer devien-

---

[1] Cette démonstration se trouve résumée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIX, p. 58.

dra alors une conséquence immédiate d'un théorème établi plus haut (n° 54).

73. Par tout point de l'espace considéré comme appartenant au solide, dans une de ses positions particulières, passe une normale, la normale à la surface trajectoire de ce point. Nous établirons qu'il n'en passe qu'une, en démontrant que deux pareilles normales N et N′ ne peuvent se rencontrer, à moins que toutes les normales ne soient concourantes, ce qui correspondrait à l'un des cas exceptionnels prévus dans l'énoncé du théorème. Supposons, en effet, que N et N′ se rencontrent en un certain point i : ou bien ce point sera fixe, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, et alors toutes les normales iront y concourir; ou bien le point i sera mobile; mais, dans cette hypothèse, deux points du solide, respectivement situés sur N et N′ décriraient des surfaces parallèles à la surface décrite par i, ce qui ne peut avoir lieu que si les droites N et N′ coïncident.

D'ailleurs ce qui vient d'être dit, au sujet du point i, s'applique quelque éloigné que l'on suppose ce point. Deux normales ne peuvent donc être parallèles à une même direction, à moins qu'elles ne soient toutes parallèles à cette direction.

Du raisonnement qui précède nous concluons que, en dehors des deux cas signalés plus haut, il ne peut y avoir plus d'une normale passant par un point quelconque ni plus d'une normale contenue dans un plan quelconque. Ces droites forment donc une congruence linéaire et, par conséquent, s'appuient sur deux mêmes droites (n° 54).

74. On peut déduire de là que :

Les normales aux surfaces trajectoires des points d'une droite sont les génératrices d'un même système d'une surface gauche du second degré qui, exceptionnellement, peut se réduire à un plan.

Remarquons d'abord que, d'après le théorème précédent (n° 72), deux quelconques des normales aux surfaces trajectoires des divers points d'une droite L ne peuvent se couper ou être parallèles, à moins que les normales correspondant à

tous les points de L ne concourent au point d'intersection des deux premières ou ne soient parallèles à leur direction commune. Dans ce cas particulier, les normales considérées sont toutes dans un même plan.

Écartons ce cas exceptionnel. Il existe alors deux droites Δ et Δ', réelles ou imaginaires conjuguées, qui rencontrent chacune toutes les normales aux surfaces trajectoires des divers points de L (nº 72). Ces normales forment donc bien un système de génératrices rectilignes d'une surface gauche du second degré.

75. Ce théorème va nous conduire à la notion et aux propriétés fondamentales des lignes ou surfaces focales d'une congruence de droites. Pour cela, nous allons démontrer la proposition suivante, que l'on trouve, sous une forme un peu différente, dans le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim [1]:

Les droites d'une congruence quelconque, considérées comme étant les diverses positions successives d'une même droite mobile, sont chacune tangentes aux surfaces trajectoires de deux de leurs points.

En effet, soit L une droite quelconque d'une congruence. On peut considérer les droites de cette congruence, infiniment voisines de L, comme autant de positions particulières de la droite L que l'on aurait déplacée, ses divers points restant sur certaines surfaces trajectoires, dont l'une d'ailleurs peut être prise arbitrairement.

Les normales aux surfaces trajectoires des points de L, menées aux divers points de cette droite, forment un système de génératrices d'une même surface gauche du second degré (nº 74). Or il y a deux de ces génératrices, F et F', réelles ou imaginaires conjuguées, qui sont perpendiculaires à L : elles sont respectivement parallèles aux droites suivant lesquelles le cône asymptotique de la surface est coupé par un plan mené par son sommet perpendiculairement à L. Il résulte de là que les surfaces trajectoires des points f et f' de rencontre

[1] Deuxième édition, p. 279.

des droites F et F′ avec la droite L sont tangentes à cette droite.

76. Suivant des dénominations consacrées par l'usage, les points f et f' sont les *foyers* de la droite L, les plans φ et φ' menés par L respectivement perpendiculaires à F et F′ sont les *plans focaux* correspondants de cette même droite et le lieu des foyers f et f' des diverses droites de la congruence est la *surface focale* de cette congruence.

Cette surface focale se composera généralement de deux nappes, lieux respectifs des points f et f'. Il pourra néanmoins arriver que ces nappes soient deux surfaces géométriquement distinctes. Dans certains cas aussi l'une d'elles se réduira à une ligne. Dans des cas encore plus particuliers, les deux nappes se réduiront à deux lignes distinctes ou à deux branches différentes d'une même courbe. Une ligne ou l'ensemble de deux lignes satisfaisant à ces conditions, c'est-à-dire rencontrant en deux points chaque droite d'une congruence, s'appelle *focale* de cette congruence. On a vu précédemment que la focale d'une congruence linéaire est composée de deux droites (n° 54).

77. Appelons *surfaces d'une congruence* les surfaces réglées dont les génératrices rectilignes sont des droites de cette congruence. Ces surfaces donnent lieu au théorème suivant :

Les surfaces d'une congruence, qui contiennent une même droite de cette congruence, sont toutes tangentes en deux points de cette droite. Ces points de contact et les plans tangents correspondants sont respectivement les foyers et les plans focaux de la droite.

En effet, déplaçons la droite L de la congruence sur l'une quelconque des surfaces de cette congruence qui la contiennent. Les tangentes aux trajectoires des foyers f et f' de L sont situées respectivement dans les plans focaux φ et φ' (n° 75). Puisque les plans φ et φ' passent tous deux par L et renferment respectivement les tangentes en f et f' à deux courbes tracées sur la surface, ce sont les plans tangents à cette surface en f et en f'.

78. La surface focale d'une congruence jouit d'une propriété importante, qui peut s'énoncer ainsi :

Les droites d'une congruence sont doublement tangentes à la surface focale de cette congruence.

Imaginons, en effet, que nous déplacions une droite quelconque L de la congruence sur une des surfaces de cette congruence. Les foyers f et f' y décrivent respectivement des branches de courbes, qui appartiennent en même temps à la surface focale de la congruence. Par suite, les tangentes en f et en f' à ces branches de courbes sont respectivement dans les plans focaux correspondants φ et φ' (n° 77) et dans les plans tangents en f et en f' à la surface focale. Toute droite menée par f dans le plan φ est donc située dans le plan tangent, au même point, à la surface focale et, par suite, ces deux plans coïncident.

On voit de même que le plan φ' est tangent en f' à la surface focale.

79. *Dans le cas où le lieu d'un foyer f est une courbe (focale), le plan focal correspondant φ est le plan déterminé par la droite* L *de la congruence, qui a pour foyer f, et par la tangente en ce point à la courbe.*

On s'en rend compte en considérant ce cas comme une limite du précédent. On s'en assure plus directement, en imaginant que la droite L se déplace, sans cesser d'appartenir à la congruence, et remarquant que le plan φ coïncide avec le plan tangent en f à la surface engendrée, lequel contient la droite L et la tangente en f à la focale.

80. Imaginons l'ensemble des surfaces d'une congruence qui passent par une même droite L de cette congruence et considérons les plans tangents à ces surfaces, en deux points quelconques a et b de L. Il est facile de voir que, dans ces deux faisceaux de plans, les plans tangents en a et b à une même surface se correspondent anharmoniquement. En effet, les surfaces gauches de la congruence, qui touchent en a un plan α quelconque passant par L, ont en outre, aux points f et f', foyers de cette droite, les mêmes plans tangents φ et φ';

par conséquent, elles se raccordent tout le long de L et ont en b le même plan tangent β. On voit ainsi qu'à un plan α, appartenant au faisceau des plans tangents en a, correspond un plan unique β, appartenant au faisceau des plans tangents en b. En vertu du même raisonnement, le fait inverse a évidemment lieu. Il y a donc correspondance anharmonique entre les plans α et β ; en d'autres termes :

Les plans tangents correspondants, en deux points quelconques d'une droite d'une congruence, aux surfaces de cette congruence qui passent par la droite, forment deux faisceaux homographiques.

81. Considérons encore les deux faisceaux formés des plans tangents en a et b aux surfaces de la congruence. Puisque ces faisceaux sont homographiques (n° 80), il existe deux plans, réels ou imaginaires conjugués, passant par L, qui résultent chacun de la coïncidence de deux plans homologues des deux faisceaux. Il y a, par suite, au moins deux surfaces σ et σ' de la congruence qui ont chacune le même plan tangent en a et en b. Or on sait qu'en pareil cas le plan tangent est invariable en tous les points de la droite, sauf en l'un d'eux, où il est indéterminé. En conséquence, le plan tangent le long de L à la surface σ coïncidera, par exemple, avec le plan φ (n° 77), sauf au point f', où, devant en même temps coïncider avec φ' (n° 77), il sera indéterminé. De même, le plan tangent le long de L à la surface σ' sera le plan φ', sauf en f, où il sera indéterminé, devant en même temps coïncider avec φ. On conclut de là que dans les surfaces σ et σ' il existe respectivement deux génératrices rectilignes infiniment voisines de L, qui rencontrent cette droite, l'une en f, l'autre en f'. Ces génératrices étant des droites de la congruence, nous arrivons ainsi à un théorème remarquable, dû à Monge [1], que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Dans une congruence, une droite quelconque est rencontrée par deux des droites infiniment voisines.

---

[1] *Mémoires de l'Académie des Sciences,* année 1781, p. 685.

Nous avons établi en outre que *les deux points de rencontre sont les foyers de la première droite* et que *les plans passant respectivement par cette droite et les deux autres sont les plans focaux correspondants.*

Il résulte encore de ce qui précède que, *parmi les surfaces de la congruence qui passent par une droite de cette congruence, il y a deux surfaces développables.*

82. Nous signalerons, pour terminer ces considérations générales sur les congruences, une conséquence immédiate de l'un des théorèmes précédents (nº 80) qui donne lieu à un énoncé assez élégant. Prenons quatre quelconques des surfaces de la congruence qui passent par la droite L. Puisque les plans tangents en a et les plans tangents en b à ces quatre surfaces font respectivement partie de deux faisceaux homographiques, leurs rapports anharmoniques sont égaux. Donc :

Pour quatre surfaces quelconques d'une congruence, contenant une même droite de cette congruence, le rapport anharmonique des plans tangents à ces surfaces, en un point quelconque de la droite commune, reste constant, quand le point se déplace sur cette droite.

83. Ce théorème et celui dont nous l'avons déduit se transforment aisément, à l'aide du principe de dualité. Il nous paraît inutile d'en donner les énoncés.

Nous ferons enfin remarquer que la plupart des propositions sur les congruences de droites, qui viennent d'être exposées, peuvent s'étendre aux congruences de lignes courbes. On en trouvera l'énoncé et la démonstration dans les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux ([1]).

II. — Surface des singularités d'un complexe.

84. Soit L une droite quelconque d'un complexe $\mathfrak{C}$. Les droites de ce complexe, qui passent par un point quelconque p de L, forment un cône qui contient cette droite. Le plan ϖ,

---

([1]) IIe Partie, p. 1 à 8.

tangent au cône le long de L, peut être considéré comme correspondant à p; il est tel que la courbe du complexe, qui y est située, est tangente en p à L. Inversement, à un plan ϖ passant par L correspond un point p de L, en lequel la courbe du complexe, située dans le plan ϖ, est tangente à cette droite. Il est clair, d'ailleurs, que le cône du complexe, ayant son sommet en p, est alors tangent au plan ϖ le long de L. Ainsi se trouve établie, par l'intermédiaire du complexe $\mathfrak{C}$, une correspondance anharmonique entre les points de la droite L et les plans qui passent par cette droite.

Soient x la distance du point p à une certaine origine sur L et θ l'angle du plan ϖ avec un certain plan fixe passant par cette droite. La correspondance anharmonique entre les points p et les plans ϖ s'exprime par une relation de la forme

$$(1) \qquad x \operatorname{tang}\theta - \lambda \operatorname{tang}\theta - \mu x + \nu = 0.$$

85. Parmi les droites du complexe $\mathfrak{C}$, considérons celles pour lesquelles la relation précédente est telle que $\lambda\mu = \nu$. Ces droites K forment une certaine congruence. Voyons de quelles propriétés particulières elles jouissent par rapport au complexe. La relation (1) peut alors s'écrire

$$(x - \lambda)(\operatorname{tang}\theta - \mu) = 0.$$

On en conclut que, quelle que soit la valeur donnée à x, tang θ conserve la valeur constante μ, c'est-à-dire qu'à tous les points d'une droite K correspond un seul et même plan ω. Pareillement, quelle que soit la valeur donnée à θ, x reste constamment égal à λ, ce qui signifie qu'à tous les plans passant par K correspond sur cette droite un seul et même point o. Alors o est le point de contact de K avec toutes les courbes du complexe situées dans les plans passant par cette droite et ω est le plan tangent le long de K à tous les cônes du complexe qui y ont leur sommet.

Les droites présentant la particularité que nous venons de signaler ont reçu le nom de *droites singulières* du complexe. Les points tels que o et les plans tels que ω sont appelés respectivement *points singuliers* et *plans singuliers* de ce complexe.

86. Le cône du complexe, qui a pour sommet un point singulier o, admet comme génératrice la droite singulière K qui passe en o, et il résulte de ce qui précède (n° 85) que le plan tangent au cône, le long de la génératrice K, est indéterminé. Par suite, K est une génératrice double du cône. On voit ainsi que :

Les points singuliers d'un complexe sont les sommets des cônes de ce complexe qui possèdent une génératrice double.

De même, *les plans singuliers d'un complexe sont les plans des courbes de ce complexe qui possèdent une tangente double.*

Cette proposition s'établit aussi aisément que la précédente. Elle en résulte d'ailleurs immédiatement, en vertu du principe de dualité.

87. Les points singuliers d'un complexe forment évidemment une surface. Les plans singuliers de ce complexe enveloppent de même une surface. Nous allons démontrer que ces deux surfaces n'en font qu'une et nous lui donnerons le nom, qu'elle mérite ainsi à un double titre, de *surface des singularités du complexe.*

Considérons, à cet effet, une congruence $\mathfrak{S}$ commune à deux complexes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$. Soit L une droite quelconque de cette congruence. Les deux complexes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ permettent respectivement, comme nous l'avons indiqué plus haut (n° 84), d'établir deux correspondances anharmoniques entre les points p de L et les plans ϖ qui passent par cette droite. Les deux points p, qui, en vertu de ces correspondances, correspondent à un même plan variable ϖ, forment deux séries homographiques de points sur la droite L. Désignons par f et f' les deux points communs à ces deux séries, par φ et φ' les plans qui leur correspondent respectivement, à la fois dans les deux correspondances. Les cônes des deux complexes, qui ont pour sommet commun le point f, ont pour génératrice commune la droite L et pour plan tangent commun, le long de cette génératrice, le plan φ. Il en résulte que la droite L', passant par f dans le plan φ et infiniment voisine de L, appartient en même temps aux deux complexes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$

et, par suite, à la congruence $\mathfrak{S}$. Le point f, étant à l'intersection de deux droites infiniment voisines de cette congruence, est un foyer de celle-ci et le plan φ qui les contient est le plan focal correspondant (n° 81). Le point f' et le point φ' sont respectivement, pour les mêmes raisons, le second foyer et le second plan focal relatifs à la droite L.

88. Il convient d'ailleurs de remarquer que le plan φ n'est pas le plan tangent en f à la surface focale de la congruence. En effet, le plan des deux droites L et L', c'est-à-dire le plan φ, est tangent à celle des deux développables de la congruence passant par L, qui est circonscrite à la nappe focale contenant f'. Le plan φ est donc tangent à la surface focale en f' et, de même, le plan φ' est tangent à cette surface en f.

89. Supposons maintenant que $\mathfrak{S}$ soit la congruence formée des droites singulières du complexe $\mathfrak{C}$. On peut considérer cette congruence comme comprenant la totalité ou une partie des droites communes au complexe $\mathfrak{C}$ et à un second complexe $\mathfrak{C}'$. Soit K une droite singulière de $\mathfrak{C}$, o le point singulier situé sur K et ω le plan singulier passant par cette même droite. En vertu de la correspondance anharmonique que le complexe $\mathfrak{C}'$ nous permet d'établir entre les points de K et les plans passant par K (n° 84), au point o correspond un certain plan ω_1 et au plan ω un certain point o_1. D'ailleurs, puisque K est une droite singulière du complexe $\mathfrak{C}$, en vertu de la correspondance anharmonique dérivant de ce complexe, au point o correspond un plan quelconque passant sur K et, en particulier, le plan ω_1. De même au plan ω correspond un point quelconque de K et, en particulier, le point o_1 (n° 85). Il résulte de là que les points o, o_1 sont les foyers et que les plans ω, ω_1 sont les plans focaux afférents à la droite K de la congruence $\mathfrak{S}$ (n° 87). D'ailleurs, suivant la remarque faite plus haut (n° 88), c'est le plan focal ω qui est tangent en o à la nappe de la surface focale de la congruence $\mathfrak{S}$ qui contient ce point. Cette surface focale se décompose donc ici en deux surfaces distinctes et l'une de celles-ci est en même temps le lieu des points singuliers et l'enveloppe des plans singuliers du complexe $\mathfrak{C}$.

90. Le théorème très important que nous venons de démontrer peut s'énoncer de la manière suivante :

Dans un complexe de droites, la surface lieu des points singuliers a pour plan tangent, en chaque point, le plan singulier correspondant. Cette surface est, par suite, identique à la surface enveloppe des plans singuliers. Elle forme l'une des nappes de la surface focale des droites singulières.

La démonstration si simple qui nous a servi à établir cette proposition fondamentale ne diffère que dans les détails de celle qui est due à M. Pasch [1]. Elle fournit un heureux exemple de l'intervention de la Géométrie projective la plus élémentaire dans la solution d'une question dont l'Analyse ne vient à bout qu'avec un certain déploiement de calculs et sans y apporter plus de rigueur.

CHAPITRE IV.

LE COMPLEXE TÉTRAÉDRAL.

I. — Définition et génération du complexe tétraédral.

91. Le complexe connu sous le nom de *complexe tétraédral,* dont nous allons étudier dans ce Chapitre les principales propriétés, est le plus simple des complexes du second ordre.

En général, *la surface des singularités d'un complexe quadratique est du quatrième degré et de la quatrième classe.* Mais cette surface peut dégénérer en un système formé de quatre plans et des quatre points d'intersection de ces plans trois à trois, autrement dit se réduire à un tétraèdre. Le com-

---

[1] *Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt,* LXXVI Band (année 1873).

plexe correspondant se réduit alors lui-même à sa variété la plus simple, que l'on appelle le *complexe tétraédral*.

92. Sans vouloir aborder ici l'étude du complexe général du second ordre, nous allons démontrer la proposition, que nous venons d'énoncer (n° 91), concernant la surface des singularités d'un pareil complexe ([1]), puisqu'elle nous sert de base pour définir le complexe tétraédral.

Cherchons la classe de cette surface des singularités, c'est-à-dire le nombre des plans singuliers du complexe qui passent par une droite quelconque D. Les cônes du complexe qui ont pour sommets respectifs trois points quelconques de cette droite se coupent en huit points. Le plan qui passe par l'un de ces points et par la droite D est un plan singulier du complexe; car, parmi les droites du complexe qu'il contient, il y en a au moins trois qui passent par le point, ce qui exige que la conique du complexe située dans le plan soit infiniment aplatie. Les huit plans, obtenus de la sorte, coïncident d'ailleurs deux à deux; parce que tout plan singulier renferme nécessairement deux points, les deux extrémités de la conique aplatie, en chacun desquels se croisent une infinité de droites du complexe. Il y a donc bien quatre plans singuliers du complexe qui passent par la droite D, et la surface des singularités est de la quatrième classe.

On démontrerait d'une manière toute semblable, et l'on conclut d'ailleurs immédiatement de l'application du principe de dualité, que la surface des singularités est du quatrième degré ([2]).

93. Il semble naturel d'admettre que cette surface puisse dégénérer en un ensemble de quatre plans et des quatre points résultant des intersections de ces plans, de manière à se réduire à un tétraèdre *efgh*. Les quatre points singu-

---

([1]) Cette démonstration très simple est empruntée à M. Reye (*Leçons sur la Géométrie de position,* 2e édition, traduction française de M. Chemin, t. II, p. 300).

([2]) Cette surface, connue sous le nom de *surface de Kummer*, du nom de l'éminent géomètre qui l'a découverte et étudiée le premier, possède des propriétés très intéressantes qui ont fait l'objet de nombreuses recherches.

liers situés sur une droite quelconque seraient à l'intersection de cette droite et des quatre faces du tétraèdre; les quatre plans singuliers passant par une droite quelconque seraient les plans déterminés respectivement par cette droite et par les quatre sommets e, f, g, h. Nous allons voir, en effet, qu'il existe un complexe quadratique admettant une pareille surface des singularités.

Les droites singulières du complexe (n° 85), devant être tangentes à la surface des singularités, ne peuvent être que des droites passant par un des sommets ou contenues dans une des faces du tétraèdre $efgh$.

Cela posé, le cône du complexe qui a pour sommet un point quelconque m du plan d'une de ces faces, de la face efg par exemple, doit se décomposer en deux plans, dont l'intersection ml, qui est une droite singulière du complexe, doit être tangente en m à la surface des singularités, c'est-à-dire être contenue dans le plan efg. D'autre part, les deux plans devant être tangents à la surface des singularités (n° 90), il faut de toute nécessité que l'un soit le plan efg et l'autre le plan mlh; de sorte que le cône du complexe, ayant son sommet en m, se décompose en deux faisceaux de droites respectivement situés dans ces deux plans. On voit ainsi que toutes les droites passant par m dans le plan efg et, par conséquent, toutes les droites de ce plan appartiennent au complexe.

On verrait de même, et l'on peut d'ailleurs conclure de ce qui vient d'être dit, en vertu du principe de dualité, que toutes les droites qui passent par l'un quelconque des sommets du tétraèdre appartiennent également au complexe.

94. Il résulte immédiatement de ce qui précède que *tous les cônes d'un complexe tétraédral*, si un tel complexe existe, *passent par les quatre sommets du tétraèdre qui lui correspond*. En effet, parmi les droites du complexe qui passent par un point quelconque p se trouvent les droites qui joignent ce point aux quatre sommets du tétraèdre. Le cône du complexe, qui a son sommet en p, contient donc ces quatre droites et, par suite, les quatre sommets du tétraèdre.

On voit pareillement que *toutes les coniques d'un complexe tétraédral,* à supposer qu'un pareil complexe existe, *sont*

tangentes aux quatre faces du tétraèdre correspondant. En effet, les droites du complexe situées dans un plan ϖ quelconque comprennent les droites d'intersection de ce plan avec les quatre faces du tétraèdre. La conique du complexe, contenue dans le plan ϖ, est donc tangente à ces quatre droites et, par conséquent, aux quatre faces du tétraèdre.

95. Nous allons maintenant démontrer que *dans le complexe tétraédral,* s'il existe, *le rapport anharmonique des quatre plans déterminés respectivement par une droite quelconque de ce complexe et les quatre sommets du tétraèdre correspondant est constant.*

Nous démontrerons, pour cela, que ce rapport anharmonique est le même pour deux droites quelconques du complexe, et nous supposerons successivement que les deux droites soient et ne soient pas dans un même plan.

Les deux droites L et L′ étant supposées dans un même plan, soit p leur point d'intersection. Le cône du complexe qui a son sommet en p contient les quatre droites pe, pf, pg et ph (n° 94). Donc, d'après un théorème bien connu, le rapport anharmonique des quatre plans Lpe, Lpf, Lpg, Lph est égal au rapport anharmonique des quatre plans L′pe, L′pf, L′pg, L′ph.

Supposons maintenant que L et L′ soient deux droites quelconques du complexe. Il existe une infinité de droites de ce complexe qui rencontrent à la fois L et L′. En effet, le cône du complexe, ayant son sommet en un point arbitraire de L, coupe L′ en deux points. En joignant l'un de ces points au point pris sur L, on obtient une droite Λ qui unit les deux droites L et L′. Mais, d'après la première partie de la démonstration, les rapports anharmoniques (Le, Lf, Lg, Lh) et (L′e, L′f, L′g, L′h) sont tous deux égaux au rapport anharmonique (Λe, Λf, Λg, Λh). Donc ils sont égaux entre eux, comme il s'agissait de le démontrer.

96. L'existence et la génération du complexe tétraédral se trouvent maintenant établies. On voit, en effet, par ce qui précède, qu'*étant donné un tétraèdre, l'ensemble des droites, telles que les plans passant respectivement par l'une quel-*

conque d'entre elles et par les quatre sommets du tétraèdre aient un rapport anharmonique constant, forme un complexe du second ordre, dont la surface des singularités se réduit aux quatre sommets et aux plans des quatre faces du tétraèdre.

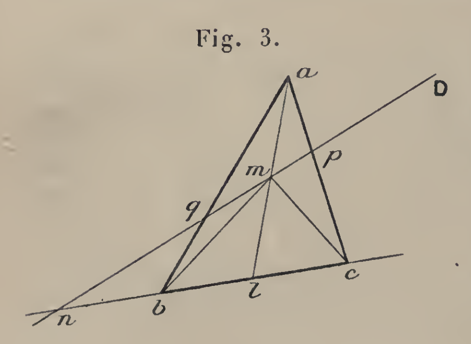
Nous appellerons *tétraèdre principal* et *rapport anharmonique* d'un complexe tétraédral le tétraèdre et le rapport anharmonique qui servent à le définir et à l'engendrer. Les sommets et les plans des faces de ce tétraèdre seront appelés respectivement *points principaux* et *plans principaux* du complexe.

D'un remarquable théorème dû à Staudt, il résulte immédiatement que *le rapport anharmonique d'un complexe tétraédral est* en même temps *égal au rapport anharmonique des points d'intersection d'une droite quelconque de ce complexe avec les quatre faces du tétraèdre principal.*

97. Nous allons démontrer le théorème de Staudt, en démontrant d'abord la proposition suivante, sur laquelle nous aurons à nous appuyer :

Étant donnés un triangle abc et une droite quelconque D *dans son plan, le rapport anharmonique du faisceau formé de la droite* D *et des droites joignant un point quelconque m de* D *aux points a, b, c est égal au rapport anharmonique du point m et des points n, p, q, où la droite* D *coupe respectivement les droites bc, ca, ab.*

Fig. 3.



En effet, en désignant par l le point de rencontre de ma et de bc (*fig.* 3), on a, d'après les propriétés les plus connues du rapport anharmonique :

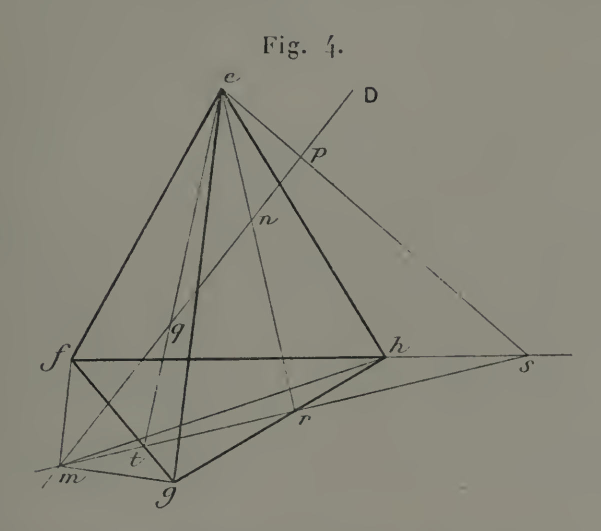
$$(m, n, p, q) = (l, n, c, b) = (ml, mn, mc, mb)$$
$$= (ma, mn, mc, mb) = (mn, ma, mb, mc).$$

98. Cela posé, le théorème de Staudt peut s'énoncer ainsi :

Le rapport anharmonique des points d'intersection d'une droite quelconque D *avec les faces* fgh, ghe, hef, efg *d'un tétraèdre* $efgh$ *est égal au rapport anharmonique des plans passant respectivement par* D *et par les sommets* e, f, g, h *de ce tétraèdre.*

Pour démontrer cette proposition, projetons coniquement du point e sur le plan fgh les points d'intersection m, n, p, q de la droite D avec les faces fgh, ghe, hef, efg du tétraèdre (*fig.* 4). Le point m coïncide avec sa projection. En désignant par r, s, t les projections respectives de n, p, q, on a,

Fig. 4.



d'après une propriété fondamentale du rapport anharmonique,

$$(1) \qquad (m, n, p, q) = (m, r, s, t),$$

et, d'après le théorème préliminaire (n° 97),

$$(2) \qquad (m, r, s, t) = (mr, mf, mg, mh).$$

D'autre part, en remarquant que les plans De, Df, Dg, Dh sont respectivement coupés par le plan fgh suivant les droites mr, mf, mg, mh, on a

$$(3) \qquad (mr, mf, mg, mh) = (\mathrm{D}e, \mathrm{D}f, \mathrm{D}g, \mathrm{D}h).$$

De la comparaison des relations (1), (2) et (3) on conclut

$$(m, n, p, q) = (De, Df, Dg, Dh).$$

C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

99. La corrélation qui existe entre les deux modes de génération, que nous venons de donner, du complexe tétraédral se lie à une autre propriété intéressante de ce complexe, qui est la suivante :

Un complexe tétraédral est polaire réciproque de lui-même relativement à toute surface du second degré, ayant pour tétraèdre autopolaire le tétraèdre principal de ce complexe.

Soient $efgh$ le tétraèdre principal du complexe et χ une quadrique admettant ce tétraèdre comme tétraèdre autopolaire. Il s'agit de démontrer que toute droite L du complexe a pour conjuguée, par rapport à la quadrique χ, une autre droite L' de ce même complexe.

En effet, désignons par m, n, p, q les points où la droite L rencontre respectivement les faces fgh, ghe, hef, efg du tétraèdre principal. Les plans polaires des points m, n, p, q, relativement à χ, passent respectivement par la droite L' et par les points e, f, g, h, et l'on a, d'après un théorème bien connu,

$$(L'e, L'f, L'g, L'h) = (m, n, p, q).$$

Le rapport anharmonique des quatre plans $L'e$, $L'f$, $L'g$, $L'h$ est donc égal au rapport anharmonique du complexe et, par conséquent, la droite L' fait partie de ce complexe (n° 95).

Le théorème que nous venons de démontrer établit une corrélation entre les propriétés du complexe tétraédral, de telle sorte que, après avoir démontré une de ces propriétés, on peut en conclure immédiatement la propriété corrélative.

100. On peut encore donner du complexe tétraédral deux modes de génération remarquables, qui vont faire l'objet de

deux théorèmes que nous allons établir. L'un de ces théorèmes peut s'énoncer ainsi :

Les droites qui joignent les points homologues de deux figures homographiques à trois dimensions forment un complexe tétraédral.

Démontrons d'abord que l'ensemble de ces droites forme un complexe du second ordre. Il suffit, pour cela, de prouver que par tout point p d'un plan quelconque ϖ il passe deux de ces droites. En effet, aux divers points de l'une des figures $\mathcal{F}$ qui sont contenus dans le plan ϖ correspondent dans la figure homographique $\mathcal{F}'$ des points contenus dans le plan ϖ' homologue de ϖ. Tout point m' du plan ϖ' qui, joint à son homologue m dans le plan ϖ, donne une droite passant par p, est nécessairement sur la droite D′ d'intersection de ces deux plans et le point m est, par suite, sur la droite D de $\mathcal{F}$, homologue de la droite D′ de $\mathcal{F}'$. Les points m et m' déterminent d'ailleurs respectivement sur D et D′ deux séries homographiques. Il en résulte que les droites mm' enveloppent une conique dans le plan ϖ et, par conséquent, qu'il passe par le point p, dans le plan ϖ, deux de ces droites, à savoir les deux tangentes menées de ce point à la conique. Il est ainsi établi que le complexe considéré est du second ordre. Nous allons maintenant faire voir que c'est un complexe tétraédral.

On sait que, étant données deux figures homographiques à trois dimensions, il existe quatre points e, f, g, h, en chacun desquels deux points homologues des deux figures coïncident. Toute droite, passant par l'un quelconque de ces points, devant être considérée comme joignant deux points homologues des deux figures, fait partie du complexe.

Cela posé, prenons arbitrairement un couple de droites pl et pl' du complexe, passant en un même point quelconque p. Le cône du complexe, dont p est le sommet, contient les six droites pe, pf, pg, ph, pl, pl', et, comme il est du second degré, le rapport anharmonique des quatre plans pel, pfl, pgl, phl est égal au rapport anharmonique des quatre plans pel', pfl', pgl', phl'.

Considérons maintenant deux droites quelconques L, L′ du complexe, non situées dans un même plan, et soit A l'une

des droites de ce complexe qui rencontrent à la fois L et L'. Les rapports anharmoniques des quatre plans Le, Lf, Lg, Lh et des quatre plans L'e, L'f, L'g, L'h sont, d'après ce qui vient d'être démontré, égaux tous deux au rapport anharmonique Ae, Af, Ag, Ah. Donc ils sont égaux entre eux. Le complexe étudié est donc bien un complexe tétraédral (nº 95).

Il résulte de la démonstration précédente que le tétraèdre principal de ce complexe a pour sommets les points coïncidents des deux figures $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$.

101. On démontrerait d'une manière toute semblable le théorème corrélatif du précédent, qui s'en conclut d'ailleurs immédiatement par voie de dualité et s'énonce ainsi :

Les droites d'intersection des plans homologues de deux figures homographiques forment un complexe tétraédral.

Il convient de remarquer que deux figures homographiques donnent naissance au même complexe tétraédral, que l'on considère celui-ci comme lieu des droites joignant les points homologues des deux figures, ou comme lieu des droites d'intersection des plans homologues de ces deux figures. C'est là une conséquence immédiate de la double définition du complexe tétraédral (nº 96) et de ce fait connu que les quatre plans, qui résultent chacun de la coïncidence de deux plans homologues de deux figures homographiques, sont les plans des faces du tétraèdre qui a pour sommets les points en chacun desquels coïncident deux points homologues des deux figures.

II. — Quadriques d'un complexe tétraédral.

102. *Par deux droites quelconques d'un complexe tétraédral et les points principaux de ce complexe passe une surface réglée du second degré, dont un système de génératrices rectilignes est composé de droites du complexe.*

En effet, soient L et L' deux droites quelconques du complexe. Les plans Le, Lf, Lg, Lh et les plans L'e, L'f, L'g, L'h font respectivement partie de deux faisceaux homographiques,

puisque le rapport anharmonique des quatre premiers est égal à celui des quatre autres (nº 95). La droite d'intersection de deux plans homologues quelconques de ces deux faisceaux engendre par suite une surface du second degré, qui contient les droites L et L', ainsi que les points e, f, g, h, puisqu'elle contient les droites E, F, G, H, suivant lesquelles les plans Le, Lf, Lg, Lh coupent respectivement les plans L'e, L'f, L'g, L'h.

Nous allons maintenant démontrer qu'une quelconque des génératrices rectilignes de la surface, faisant partie du système auquel appartiennent L et L', est une droite du complexe.

En effet, une telle génératrice L'' s'appuie sur les droites E, F, G, H, puisque ces droites sont des génératrices rectilignes de l'autre système, et, d'après un théorème bien connu, le rapport anharmonique des quatre plans L''E, L''F, L''G, L''H est égal à celui des quatre plans LE, LF, LG, LH, c'est-à-dire au rapport anharmonique du complexe. Or les plans L''E, L''F, L''G, L''H passent respectivement par la droite L'' et les quatre points principaux e, f, g, h. Cette droite satisfait donc bien à la loi qui régit toutes les droites du complexe.

103. Nous appellerons *quadriques circonscrites du complexe tétraédral* les surfaces réglées du second degré, dont nous venons de définir le rôle par rapport au complexe. Ces quadriques satisfont à cinq conditions communes; en effet, elles doivent toutes contenir les quatre points principaux du complexe et le rapport anharmonique des quatre plans qui passent respectivement par ces quatre points et par une quelconque des génératrices rectilignes de l'un des systèmes d'une pareille quadrique doit être égal au rapport anharmonique du complexe. Les quadriques circonscrites d'un complexe tétraédral forment donc un ensemble quadruplement infini. Cet ensemble comprend, outre des surfaces gauches, des cônes et des cylindres, qui sont les cônes et les cylindres du complexe.

104. Du théorème précédent on conclut immédiatement un théorème corrélatif, qui peut s'énoncer ainsi :

Par deux droites d'un complexe tétraédral on peut faire

passer une surface du second degré tangente aux quatre plans principaux de ce complexe. Un des systèmes de génératrices rectilignes de cette surface est formé de droites du complexe.

105. Nous appellerons les surfaces du second degré dont il est question dans ce théorème les *quadriques inscrites du complexe tétraédral*. Ces quadriques satisfont à cinq conditions communes; en effet, elles sont tangentes aux quatre plans principaux du complexe, et le rapport anharmonique des points de rencontre de ces quatre plans avec une quelconque des génératrices rectilignes de l'un des systèmes d'une pareille quadrique doit être égal au rapport anharmonique du complexe. Les quadriques inscrites d'un complexe tétraédral forment donc un ensemble quadruplement infini. Elles comprennent, comme cas particuliers et limites, les coniques du complexe.

106. Il résulte immédiatement des deux théorèmes qui viennent d'être établis (n°s 102 et 104) que par deux droites quelconques d'un complexe tétraédral on peut faire passer deux quadriques de ce complexe, l'une circonscrite, l'autre inscrite à son tétraèdre principal.

Imaginons une surface gauche dont les génératrices rectilignes soient des droites du complexe. Par une quelconque de ces génératrices et une autre génératrice infiniment voisine passeront deux quadriques du complexe, l'une inscrite, l'autre circonscrite, qui, à la limite, se raccorderont avec la surface gauche, le long de la première génératrice.

107. Voici une méthode simple pour *construire l'une quelconque des quadriques circonscrites d'un complexe tétraédral, connaissant le tétraèdre principal efgh et le rapport anharmonique ρ qui le déterminent.*

Par e et f faisons passer respectivement deux droites quelconques E et F; puis du point h menons une droite s'appuyant à la fois sur E et sur F. Soient e' et f' les points de rencontre respectifs de cette droite avec E et F. Prenons sur

la même droite un nouveau point g', tel que le rapport anharmonique (e', f', g', h') soit égal au rapport anharmonique donné ρ du complexe. Une droite mobile L, s'appuyant constamment sur E, sur F et sur la droite G qui joint g et g', engendrera une quadrique du complexe circonscrite au tétraèdre $efgh$. En effet, soit H la génératrice rectiligne de la quadrique, du même système que E, F et G, qui passe par h. On voit que les quatre plans passant respectivement par la droite mobile L et par les droites fixes E, F, G, H, c'est-à-dire par les points e, f, g, h, ont un rapport anharmonique égal à ρ, ce qui montre bien que la droite L fait partie du complexe.

108. La détermination d'une quadrique circonscrite du complexe dépend des directions des droites E et F, qui peuvent être choisies arbitrairement. On reconnaît ainsi, comme on l'a déjà vu plus haut, que ces quadriques forment un ensemble quadruplement infini.

Une méthode analogue à la précédente, et s'en déduisant d'ailleurs dualistiquement, permettrait de construire les quadriques inscrites du complexe tétraédral.

109. On peut se proposer les problèmes inverses des deux précédents, consistant à *trouver un complexe tétraédral, dont on donne une quadrique inscrite ou circonscrite.*

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une quadrique circonscrite. Prenons arbitrairement sur cette surface quatre points e, f, g, h, non contenus dans un même plan, et considérons les génératrices d'un même système E, F, G, H de la quadrique, qui passent respectivement par ces quatre points. D'après un théorème bien connu que nous avons déjà rappelé, les quatre plans passant respectivement par l'une quelconque des génératrices rectilignes L de la surface appartenant à l'autre système, et par les droites E, F, G, H, c'est-à-dire par les points e, f, g, h, auront un rapport anharmonique constant ρ. Par conséquent, les génératrices L de la quadrique feront partie du complexe tétraédral dont les points e, f, g, h sont les points principaux et dont ρ est le rapport anharmonique. Cette quadrique, qui contient d'ailleurs les points e, f, g, h, sera donc une quadrique circonscrite du complexe tétraédral ainsi déterminé.

On verrait de même que toute quadrique gauche peut être considérée comme quadrique inscrite d'un complexe tétraédral, qui aurait pour plans principaux quatre plans tangents quelconques de la quadrique, ne se coupant pas en un même point.

III. — Cubiques gauches d'un complexe tétraédral.

110. Par les points principaux e, f, g, h d'un complexe tétraédral et par deux points p et p', pris arbitrairement, qui ne soient par suite en ligne droite avec aucun des quatre points principaux, on peut faire passer une cubique gauche C_3 et une seule. Supposons que les points p et p' soient pris sur une des droites du complexe. Il est facile de voir que toutes les cordes et, en particulier, toutes les tangentes de la cubique C_3 seront alors des droites du complexe. Une première corde de cette cubique est la droite pp', qui, par hypothèse, appartient au complexe. Considérons une autre corde qq', joignant deux points quelconques q et q' de C_3. D'après un théorème bien connu, le rapport anharmonique des quatre plans qui passent par la droite qq' et par les points e, f, g, h de la cubique C_3 est égal au rapport anharmonique des plans qui passent par la droite pp' et par les mêmes points. Or ce rapport anharmonique est égal à celui du complexe. Donc la droite qq' fait partie du complexe.

Les cubiques telles que C_3, dont les cordes sont des droites du complexe, sont complètement déterminées, quand on les assujettit à passer par un point p arbitraire et par un second point p', pris sur le cône du complexe, qui a son sommet en p. Leur ensemble dépend, par suite, de trois paramètres variables. Nous avons donc démontré ce théorème :

Il existe une infinité triple de cubiques gauches dont les cordes appartiennent à un même complexe tétraédral.

Ces cubiques passent par les points principaux du complexe.

Par deux points pris arbitrairement sur une droite quelconque du complexe il passe une de ces cubiques et il n'en passe qu'une.

111. On peut dire que, parmi les cubiques gauches, en nombre quadruplement infini, qui passent par les quatre points principaux d'un complexe tétraédral, celles-là sont des cubiques du complexe qui sont capables d'un rapport anharmonique égal à celui du complexe, c'est-à-dire qui sont telles que les plans passant par une corde quelconque de cette cubique et les quatre points principaux aient un rapport anharmonique égal à celui du complexe.

112. Lorsque la droite pp' passe par l'un des points principaux du complexe, le point e par exemple, la cubique C_3 se décompose en cette droite et en une conique circonscrite au triangle fgh. Le théorème énoncé plus haut (n° 110) subsiste néanmoins ; les cordes de la cubique sont, d'une part, les cordes de la conique, c'est-à-dire les droites du plan fgh, qui on l'a vu (n° 93), appartiennent bien au complexe, et, d'autre part, les droites, faisant également partie du complexe, qui joignent un point quelconque de pp' à un point quelconque de la conique.

113. Par une droite quelconque L d'un complexe tétraédral passent une infinité de quadriques circonscrites de ce complexe (n° 103). Considérons deux de ces quadriques. Ces deux surfaces, ayant une génératrice rectiligne commune L, se coupent en outre suivant une cubique gauche, qui rencontre, comme on le sait, la droite L en deux points et qui passe par les quatre points principaux du complexe, puisque ces quatre points appartiennent à la fois aux deux quadriques (103). Cette cubique est, par suite, une cubique du complexe. De là le théorème suivant :

Deux quadriques circonscrites d'un complexe tétraédral, qui ont en commun une droite du complexe, se coupent suivant une cubique de ce complexe.

114. Soient L, L', L'' trois droites quelconques d'un complexe tétraédral. Par L et L' passe une des quadriques circonscrites de ce complexe. Par L et L'' passe une autre de ces surfaces. Ces deux quadriques, ayant en commun la droite L, se coupent suivant une cubique gauche. Cette

courbe a, d'ailleurs, pour cordes la droite L et par suite aussi les droites L′ et L″. Elle passe en outre, comme les deux surfaces dont elle est l'intersection, par les quatre points principaux du complexe. C'est donc une cubique de ce complexe.

On remarquera que la démonstration précédente serait en défaut, si les trois droites étaient trois génératrices d'un même système d'une quadrique circonscrite du complexe. En conséquence, on peut dire que :

Trois droites d'un complexe tétraédral, qui ne sont pas des génératrices d'un même système d'une quadrique circonscrite du complexe, sont des cordes d'une même cubique de ce complexe.

CHAPITRE V.

GÉNÉRATION DES CONGRUENCES DE DROITES DU PREMIER ORDRE ET DE CLASSE QUELCONQUE.

---

115. Conformément à une définition générale donnée plus haut (n° 3), une congruence de droites du premier ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe est un ensemble doublement infini de droites, tel que par tout point arbitraire il en passe une et une seule, et qu'il y en ait n d'entre elles contenues dans un plan quelconque.

Kummer, dans un Mémoire célèbre [1], a fait connaître un mode de génération de ces congruences de la plus élégante simplicité. On peut, comme nous allons le faire, établir ce résultat si remarquable par une voie plus directe que celle suivie par l'illustre géomètre [2]. Le mode de raisonnement qui nous servira n'est qu'une généralisation de celui par

---

(1) *Ueber die algebraischen strahlen Systeme* (*Mathematische Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1886, p. 1 à 120).

(2) Nous avons déjà publié une Note sur ce sujet dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VI, p. 63 à 67; 1892.

lequel nous avons déjà démontré la propriété fondamentale, que possèdent les droites d'une congruence linéaire, de rencontrer deux mêmes droites fixes (n° 54).

116. Commençons par établir deux propositions préliminaires, concernant les congruences du premier ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe, que nous appellerons, pour abréger le langage, congruences $(1, n)$.

Les droites d'une congruence $(1, n)$, *qui rencontrent une même droite fixe arbitraire, forment une surface gauche du* $(n+1)^{\text{ième}}$ *degré* [1].

Par la droite fixe D faisons passer un plan quelconque ϖ. Il est bien clair que ce plan ne peut couper la surface gauche σ, qui vient d'être définie, que suivant une ou plusieurs droites; car une droite de la congruence, qui rencontre D, ne peut couper le plan ϖ en un second point, sans y être contenue tout entière. Or, par définition même, n droites de la congruence sont dans le plan ϖ. D'ailleurs, la droite D est une ligne simple de σ, puisque par chaque point de D passe une droite, et une seule, de la congruence. La surface gauche σ est ainsi coupée par tout plan contenant D suivant $n+1$ droites. Elle est donc du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré.

117. *Les diverses surfaces gauches engendrées par les droites d'une congruence* $(1, n)$, *qui s'appuient sur des droites d'un même plan, concourant en un même point, forment un faisceau ponctuel et ont, en plus de* $n+1$ *droites communes, une intersection commune de degré* $n(n+1)$ [2].

Soit un faisceau de droites D, situées dans un même plan ϖ et concourant en un même point p. Chaque droite D donne lieu à une surface gauche σ, engendrée par les droites de la congruence qui la rencontrent. Par tout point a, pris arbitrairement, passe une des surfaces σ et une seule. Par ce point, en effet, passe une droite L, et une seule, de la congruence. Cette droite L est rencontrée par une des droites D,

---

(1) Ce théorème est une généralisation de celui qui a été énoncé et démontré au n° 52.

(2) Ce théorème généralise celui qui fait l'objet du n° 53.

celle qui joint p à la trace de L sur le plan ϖ, et à cette droite D correspond une des surfaces σ, la seule qui passe par le point a. Ces surfaces étant assemblées de telle manière que par un point quelconque il en passe une, et une seule, forment un faisceau ponctuel. Elles ont d'ailleurs en commun les n droites de la congruence situées dans le plan ϖ et la droite de cette congruence qui passe par le point p; le reste de leur intersection est donc d'un degré

$$(n+1)^2 - n - 1 = n(n+1).$$

Il est facile de voir que *ce lieu de degré* $n(n+1)$ *est rencontré en deux points par chacune des droites de la congruence*. En effet, une droite quelconque L de la congruence doit couper en $n+1$ points l'une quelconque des surfaces gauches d'ordre $n+1$ considérées plus haut (nº 116), soit la surface σ. Mais la droite L, faisant partie d'une de ces surfaces gauches, ne peut couper σ que sur le lieu C, de degré $n(n+1)$, intersection commune de ces surfaces. D'ailleurs L ne peut rencontrer le lieu C en un point unique; car ce lieu serait une ligne multiple d'ordre $n+1$ sur la surface σ, ce qui est impossible. D'autre part, la droite L ne peut s'appuyer sur C en plus de deux points; car alors l'ensemble dont elle fait partie ne serait pas doublement infini. Donc L rencontre C en deux points.

118. Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante :

Excepté la congruence du premier ordre et de la troisième classe, composée des cordes d'une cubique gauche, toute congruence du premier ordre et de la $n^{\text{ième}}$ *classe est formée des droites qui s'appuient à la fois sur une même droite et sur une même courbe gauche du* $n^{\text{ième}}$ *degré, rencontrant cette droite en* $n-1$ *points.*

Reprenons le faisceau des droites D concourant en un même point arbitraire p, dans un même plan arbitraire ϖ, et considérons le faisceau des surfaces gauches σ, engendrées par l'ensemble des droites L de la congruence, en s'appuyant sur les diverses droites D. Le lieu C de degré $n(n+1)$,

intersection commune des surfaces σ, qui est rencontré en deux points par chacune des droites L, pourra être indécomposable ou se dédoubler. Examinons successivement ces deux hypothèses.

119. *Première hypothèse.* — Soit h le degré de C. Par un point quelconque a de C et la droite D, qui détermine la surface σ, faisons passer un plan. Ce plan coupe C en $h-1$ autres points b. Par chaque point a de C passent donc $h-1$ génératrices de σ. Donc C est d'ordre de multiplicité $h-1$ sur σ. Les $n+1$ points de rencontre de la génératrice ab de cette surface avec l'une quelconque des autres surfaces σ du même faisceau se composent donc de $h-1$ fois les points a et b. D'où

$$2(h-1)=n+1.$$

Coupons C par un plan quelconque. Les h points d'intersection, joints deux à deux, donnent les $\frac{h(h-1)}{2}$ droites de la congruence situées dans ce plan. Donc

$$\tfrac{1}{2}h(h-1)=n.$$

Des deux relations précédentes on conclut immédiatement les deux solutions

$$h=2, \quad n=1 \quad \text{et} \quad h=3, \quad n=3.$$

La première de ces solutions représente une congruence linéaire spéciale, dans laquelle les deux droites directrices coïncident : elle est sans intérêt. La seconde donne lieu à une congruence du premier ordre et de la troisième classe, formée des cordes d'une cubique gauche. On aurait pu prévoir ce dernier résultat en observant que la cubique est la seule courbe gauche qui n'ait qu'un point double apparent, condition essentielle pour qu'une courbe soit la directrice unique d'une congruence du premier ordre.

120. *Deuxième hypothèse.* — Soient h et k les degrés des deux lignes C_h et C_k, en lesquelles C se décompose. Par un point quelconque a de C_h et la droite D, qui détermine σ, faisons passer un plan. Ce plan coupe C_k en k points b. Par chaque point a de C_h passent ainsi k génératrices de σ. Donc,

sur la surface σ, C_h est d'ordre de multiplicité k et, de même, C_k est d'ordre de multiplicité h. Les $n+1$ points de rencontre de la génératrice ab de σ avec l'une quelconque des autres surfaces σ du même faisceau se composent donc de k fois le point a et de h fois le point b. D'où

$$h+k=n+1.$$

D'autre part, on obtiendra les n droites de la congruence, situées dans un plan quelconque, en joignant de toutes les manières possibles les h points où ce plan coupe C_h aux k points où il coupe C_k. Donc

$$hk=n.$$

Des deux relations précédentes, on conclut

$$h=1, \qquad k=n \qquad \text{ou bien} \qquad h=n, \qquad k=1.$$

Ces deux solutions n'en font qu'une : elles donnent lieu à une congruence du premier ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe, composée de droites s'appuyant à la fois sur une droite Δ et sur une courbe gauche C_n du $n^{\text{ième}}$ degré.

Il est d'ailleurs facile de voir que Δ rencontre C_n en $n-1$ points. En effet, par un point quelconque de l'espace ne doit passer qu'une droite de la congruence. Or cette droite doit se trouver à l'intersection du cône ayant ce point pour sommet et C_n pour directrice avec le plan passant par ce même point et la droite Δ. Pour qu'une seule des n droites ainsi obtenues convienne à la congruence, c'est-à-dire s'appuie, en des points différents, sur C_n et sur Δ, il faut et il suffit que Δ rencontre C_n en $n-1$ points.

Ainsi se trouve établi le mode de génération le plus général d'une congruence du premier ordre et de la $n^{\text{ième}}$ classe. On en conclut, comme cas particulier, que les droites d'une congruence du premier ordre et de la première classe s'appuient sur deux mêmes droites (n° 53).

Le principe de dualité permettrait de conclure aisément de ce qui précède un mode de génération simple des congruences de la première classe et d'un ordre quelconque.

NOTE A.

ÉQUATION GÉNÉRALE DU COMPLEXE LINÉAIRE.

Considérons un vecteur de longueur V sur l'une quelconque des droites d'un complexe linéaire. Désignons par U la projection de ce vecteur sur l'axe du complexe et par K son moment relatif à cet axe. En appelant θ l'angle des droites considérées et r leur plus courte distance, on a immédiatement

$$U = V\cos\theta, \qquad K = Vr\sin\theta;$$

d'où

$$\frac{K}{U} = r\,\text{tang}\,\theta.$$

Mais, pour les diverses droites du complexe, r tangθ est constant et égal au paramètre c de ce complexe (n° 38). On a donc

$$\frac{K}{U} = c, \tag{1}$$

c'est-à-dire qu'*il y a proportionnalité entre la composante parallèle à l'axe du complexe d'un vecteur quelconque porté sur une droite quelconque de ce complexe et le moment de ce vecteur par rapport au même axe.*

Considérons un système de trois axes coordonnés rectangulaires quelconques OX, OY, OZ. Sur chaque droite du complexe portons une longueur arbitraire V, dans n'importe quel sens. Soient X, Y, Z les projections du vecteur ainsi obtenu sur les trois axes coordonnés, L, M, N les moments de ce vecteur par rapport aux mêmes axes.

Ces éléments X, Y, Z, L, M, N ou plutôt les rapports de cinq d'entre eux au sixième peuvent être considérés comme les coordonnées de la droite. Ces éléments vérifient d'ailleurs identiquement la relation bien connue

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point fixe quelconque de l'axe du complexe, α, β, γ les angles de l'une quelconque des directions de cet axe avec les axes coordonnés. La projection U du vecteur V sur l'axe du complexe a pour expression

$$U = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

On sait également que le moment K du vecteur V par rapport au même axe est donné par la relation

$$K = (L + zY - yZ)\cos\alpha + (M + xZ - zX)\cos\beta + (N + yX - xY)\cos\gamma.$$

En substituant ces expressions de K et de U dans la relation (1) qui définit le complexe et que nous écrirons

$$K + \lambda U = 0,$$

on obtient une équation linéaire et homogène entre les six éléments X, Y, Z, L, M et N. On peut l'écrire

$$AX + BY + CZ + DL + EM + FN = 0, \tag{2}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\cos\alpha - z\cos\beta + y\cos\gamma &= \rho A, \\ \lambda\cos\beta - x\cos\gamma + z\cos\alpha &= \rho B, \\ \lambda\cos\gamma - y\cos\alpha + x\cos\beta &= \rho C; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \rho D, \\ \cos\beta &= \rho E, \\ \cos\gamma &= \rho F, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ρ désignant un coefficient de proportionnalité.

Inversement, toute équation telle que (2), linéaire et homogène entre les coordonnées X, Y, Z, L, M et N définit, quels que soient les coefficients A, B, C, D, E, F, un complexe linéaire.

Pour établir cette proposition, il suffit de montrer que le système des équations (3) et (4) permet de déterminer x, y, z, α, β et γ.

Or, des équations (4) on conclut immédiatement $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, après en avoir déduit

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}.$$

D'autre part, en ajoutant les équations (3), après les avoir multipliées respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on obtient

$$(5) \qquad \lambda = \rho^2 (AD + BE + CF) = \frac{AD + BE + CF}{D^2 + E^2 + F^2}.$$

Les équations (3) linéaires par rapport aux seules inconnues restantes x, y, z se réduisent à deux, en raison de la valeur (5) donnée à λ. On peut dès lors les considérer comme étant les équations de trois plans qui se coupent suivant une même droite. Le complexe linéaire, qui a pour axe cette droite et dont le paramètre est déterminé par la relation (5) est donc bien défini par l'équation (2).

Pour que le complexe linéaire soit un complexe spécial, il faut et il suffit que le paramètre λ soit nul et, par suite, que les coefficients de l'équation (2) vérifient la relation

$$AD + BE + CF = 0.$$

NOTE B.

SUR LE ROLE DU COMPLEXE LINÉAIRE DANS LA CINÉMATIQUE ET LA STATIQUE DES SOLIDES INVARIABLES.

Le rôle du complexe linéaire dans la théorie du déplacement d'un solide invariable peut, en quelque sorte, se résumer dans le théorème suivant :

Les normales aux trajectoires des divers points d'un solide en mouvement, pour une position quelconque de ce solide, font partie d'un même complexe linéaire.

La démonstration de ce théorème est des plus simples.

En effet, en un point quelconque a de l'espace, considéré comme appartenant au solide, dans l'une de ses positions,

les normales à la trajectoire de ce point sont dans un même plan, à savoir le plan normal α à cette trajectoire. D'ailleurs, toutes celles des normales aux trajectoires des divers points du solide qui passent en a sont contenues dans le plan α; car une telle droite est normale aux trajectoires de ses divers points et, en particulier, à la trajectoire du point a; par conséquent, elle est nécessairement dans le plan normal α. Les normales considérées étant telles que toutes celles qui passent par un même point sont dans un même plan, leur ensemble forme un complexe linéaire (n° 9).

Il est facile de voir que, réciproquement, *tout complexe linéaire peut être considéré comme formé par les normales simultanées aux trajectoires d'un solide invariable* (¹).

En effet, prenons cinq droites du complexe, projectivement indépendantes. Sur chacune de ces droites marquons un point et par ce point faisons passer un élément de droite perpendiculaire au plan polaire correspondant. Les cinq éléments rectilignes ainsi obtenus définissent le déplacement infiniment petit du solide auquel appartiennent les cinq points. D'ailleurs, ainsi que nous l'avons démontré, les normales aux trajectoires de ce solide, dans sa position actuelle, forment un complexe linéaire. Ce complexe et le complexe donné coïncident nécessairement, puisqu'ils ont cinq droites communes (n° 71).

Le complexe linéaire intervient également dans la théorie des systèmes de forces, comme le montre le théorème suivant :

Étant donné un système de forces appliquées à un solide, les droites, par rapport à chacune desquelles la somme des moments de ces forces est nulle, forment dans leur ensemble un complexe linéaire.

Cherchons en effet les droites qui, passant par un point pris arbitrairement a, jouissent, par rapport à un système de forces d'ailleurs quelconque, de la propriété indiquée dans

(¹) La démonstration que nous donnons ici de cette réciproque est empruntée à M. Jaggi (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. IV, p. 85.)

l'énoncé précédent. Dans ce but, imaginons le vecteur ak issu du point a, qui représente le moment résultant du système de forces, par rapport à ce point. On sait que la somme des moments de ces forces par rapport à une droite quelconque ax, passant en a, est représentée proportionnellement par la projection de ak sur ax. Par conséquent, les droites par rapport à chacune desquelles cette somme de moments est nulle sont perpendiculaires à ak; elles sont donc dans un même plan. C'est bien la propriété caractéristique des droites d'un complexe linéaire (n° 9).

En prenant ce théorème comme point de départ, on peut se proposer de traduire dans le langage de la Statique les principales propriétés du complexe linéaire. Nous devons nous borner ici à cette indication générale, pour ne pas sortir des limites que nous nous sommes tracées.

NOTE C.

SUR LE CÔNE DE MALUS.

Imaginons un ensemble de droites liées aux divers points de l'espace par une loi telle que chaque point de l'espace serve d'origine à une de ces droites et que, réciproquement, sur chaque droite de l'ensemble se trouve un point lui servant d'origine. Il est aisé de voir qu'un tel ensemble de droites forme un complexe. En effet, celles de ces droites dont l'origine est dans un plan, pris arbitrairement, forment une congruence; car elles sont soumises à deux conditions simples; et les diverses congruences obtenues de la sorte, en déplaçant le plan parallèlement à lui-même, appartiennent à un même complexe, qui comprend l'ensemble des droites considérées.

Ceci posé, nous allons démontrer un important théorème, dû à Malus [1], que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donné un ensemble de droites, telles que la direction

---

[1] *Traité d'Optique.* — *Voir* aussi le XIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

de chacune d'elles est déterminée par le point qui lui sert d'origine, le cône, dit cône de Malus, *lieu des droites suivant lesquelles un point quelconque doit se déplacer, pour que la droite de l'ensemble dont ce point est l'origine rencontre cette même droite dans sa position infiniment voisine, est un cône du second degré.*

Il suffira de montrer que, dans un plan quelconque ϖ passant par le point o considéré, il existe deux droites issues de o, qui satisfont aux conditions de l'énoncé. Considérons, à cet effet, parmi les droites de l'ensemble, celles dont l'origine est dans le plan ϖ : elles forment une congruence, dont fait partie la droite D de l'ensemble ayant le point o pour origine. Or, d'après un théorème de Monge (n° 81), il existe, dans cette congruence, deux droites infiniment voisines de D qui rencontrent cette droite. Les traces sur le plan ϖ des plans passant respectivement par D et par ces deux droites infiniment voisines sont les intersections de ce plan avec le cône de Malus, qui a pour sommet le point o. Donc ce cône est du second degré.

Deux remarques sont à faire au sujet de cette démonstration. Tout d'abord, nous avons supposé qu'une seule droite de l'ensemble passait par un point o quelconque. S'il y en avait plusieurs, il y aurait autant de cônes de Malus, ayant leur sommet en o, qu'il y aurait de pareilles droites.

En second lieu, on peut observer qu'un ensemble de droites, tel que le définit Malus, peut, dans certains cas, se réduire à une congruence. C'est ce qui se produit, lorsque les divers points d'une quelconque des droites du système peuvent indifféremment lui servir d'origine. En ce cas, chacun des cônes de Malus se réduit à un système de deux plans, à savoir le système des deux plans focaux de la droite correspondante de la congruence.

M. Kœnigs, dans une thèse remarquable sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé (année 1882), a fait ressortir le rôle fondamental du cône de Malus dans cette théorie. Nous devons nous borner ici à cette indication.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

APPENDICE.

Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites.

CHAPITRE I.

Complexe linéaire. — Système focal.

CHAPITRE II.

Congruences linéaires. — Faisceaux de complexes linéaires.

CHAPITRE III.

Généralités sur les complexes et les congruences de droites.

CHAPITRE IV.

Le complexe tétraédral.

CHAPITRE V.

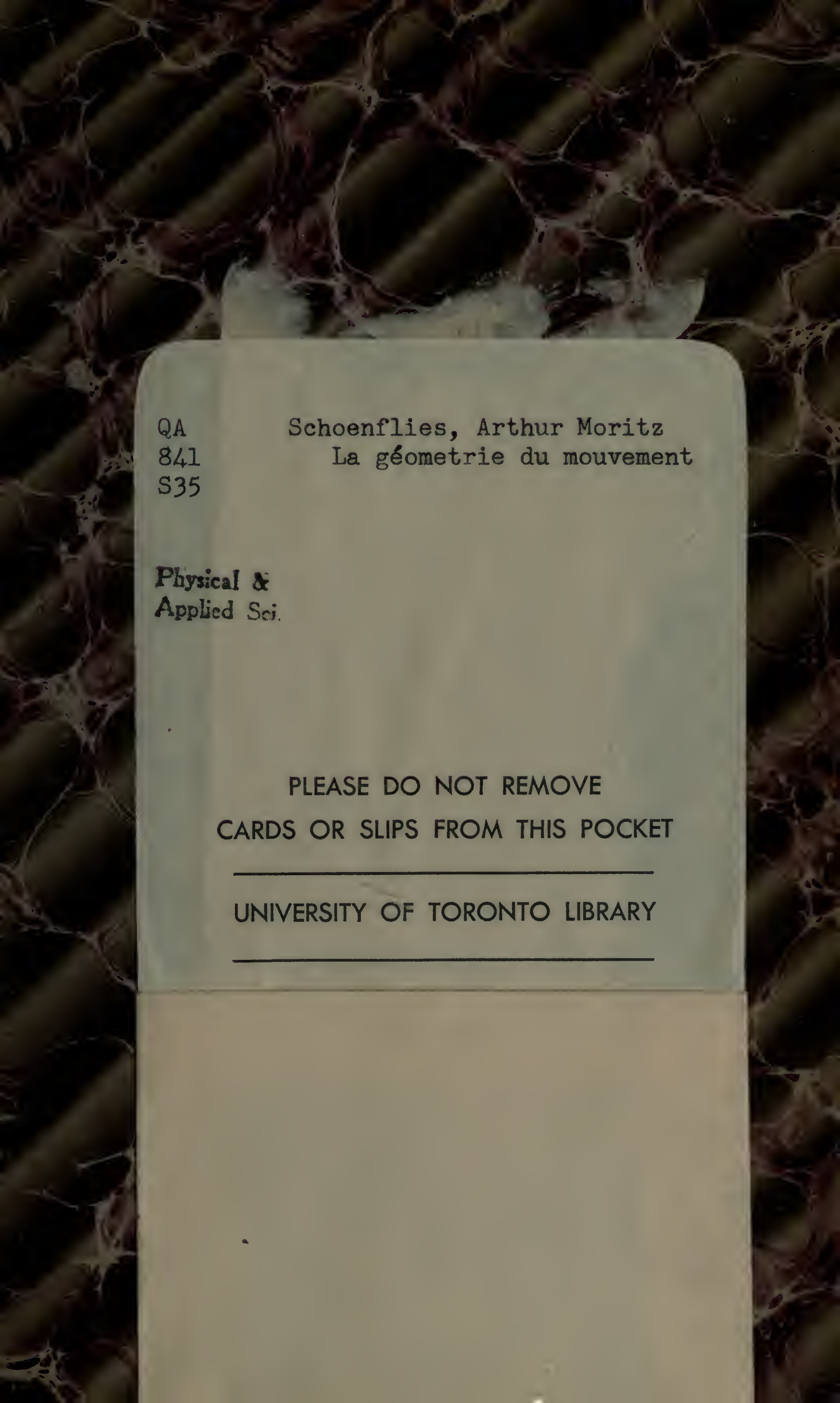
ERRATA.

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lire*
7	4	Soit	Soient
11	15	c'^{v}	$c^{v'}$
11	18	c^{v}	$c^{v'}$
14	3	O_{01} O_{20}	O'_{01} O'_{20}
15	3	indirecte	du mouvement indirect
32	4 bas	σ'	σ
34	2	*ajoutez :*	et le centre instantané O.
36	9	milieu de la distance comprise	point q tel que $P'q$ est égal au quart de la distance comprise
»	12	C	σ
44	20	centre	centre M
45	9	O'	O'_{01}
53	4	S et S_1	S_0 et S_1
54	dernière	$a_0 a_1)$	$(a_0 a_1)$

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lire*
56	7	correspondants de deux	correspondants des deux
57	24	a_0^ν	α^ν
61	6	a	a'
id.	15	ε'_1	ε'
62	23	normal perpendiculaire à	normal à
Id. note	3	présentent *par*	présentent pour
66	20	deux *faisceaux* dont l'un	deux *gerbes* dont l'une
80	28	considérations *faite*	considérations *faites*
85	dernière	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{S}_1$
189	17	triède	trièdre
229	6	nº 1	nº 11
234	5	deux diamètres conjugués du	elles-mêmes conjuguées par rapport au
»	21	diamètres conjugués du	droites conjuguées par rapport au
249	1	linéaire	linéaires
256	18	positions successives	positions
288	1	est déterminée par le	dépend du

7843 Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.




QA
841
S35
Schoenflies, Arthur Moritz
La géometrie du mouvement
Physical &
Applied Sci.
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

